NAZIONALE
B. Prov.
XXI
30
BIBLIOTECA
VITT. EM. III
NAPOLI

BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine 11 28374

Digitized by Google

B Pu
XXL
30

Duplicato di B. Trat.

I 315 1/2

Digitized by Google

Digitized by Google

CATECHISMO

DI

MATEMATICHE PURE

AD USO DEGLI STUDI GENERALI

Parte prima — Sezione prima

GEOMETRIA PIANA

548481

GEOMETRIA PIANA

DI

CARLO ROCCO

Professore di Geometria nel R. Collegio Militare

TERZA EDIZIONE

Riveduta, corretta, ed accresciuta.

Mathesis philosophiæ, et scientiis initia, ac veluti mammam praebet.
Bac.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

NAPOLI
DALLO STABILIMENTO DEL GUTTEMBERG

1844

Tutti gli esemplari, che non sono muniti della firma dell'Autore, devono considerarsi come contraffatti.

Digitized by Google

PREFAZIONE

L'insegnamento è la pietra di paragone dei libri elementari, per cui nell'intraprender la terza edizione di questa istituzione di geometria piana abbiamo procurato di mettere a profitto le osservazioni fatte nell'insegnarla, affinchè essa potesse meglio corrispondere al suo scopo, cioè quello di ridurre la scienza alla più grande semplicità possibile, senza togliere nulla al rigore giustamente richiesto ne' libri di Matematiche. Quindi siamo andati ritoccando quà e là il nostro lavoro, ad oggetto di render più chiare o più compiute, e talvolta anche più rigorose alcune teoriche; sia con qualche giunta, sia con qualche modificazione secondo i diversi casi. Ed in ciò abbiamo seguito l'esempio di molti distinti geometri che a' nostri giorni hanno scritto elementi di Matematiche; poichè ne' libri di questo genere qualunque sistema si adotti, bisogna attendere che l'insegnamento faccia scoprire certi perfezionamenti che non si possono prevedere scrivendo. I più notevoli da noi fatti in questa edizione si riducono a ciò che segue.

Il problema, in cui si propone di costruire un triangolo essendo dati tre de' suoi elementi, fra i quali vi sia almeno un lato, era stato da noi messo, ad imitazione di altri geometri, nel Cap. XIII, cioè dopo la teorica delle intersezioni e de' contatti de' cerchi. Euclide ha risoluto un solo caso di questo problema, e lo ha fatto in un modo imperfetto,

perchè assume come evidente l'incontro de' due cerchi, mentre dev'essere dimostrato, onde è stato biasimato dal Wolfio, dal Simpson, e da altri dotti geometri, i quali stimarono perciò doversi dare la risoluzione del problema enunciato in tutti i casi possibili, dopo la teorica sopra nominata. Purtuttavolta riflettendo che quello incontro può dimostrarsi a rigore indipendentemente dalla teorica in quistione, abbiam giudicato di mettere la risoluzione di un tal problema in fine del Cap. V, cioè dopo di aver esposto le proprietà de'triangoli, e delle rette perpendicolari ed oblique considerate come lati di triangoli, perocchè, secondo il nostro modo di vedere, bisogna dare la descrizione geometrica delle figure prima di venire a paragonarle fra loro. Facendo cambiar luogo al problema medesimo, abbiam procurato che la sua risoluzione nulla perdesse in quanto al rigore, dappoichè trattavasi di problema importantissimo; e ci era occorso di osservare che la mancanza di una soluzione completa di esso negli elementi di Euclide, aveva indotto qualche solenne euclidista ad attribuire ad errore delle tavole logaritmiche l'assurdo trigonometrico che presenta alle volte il calcolo delle formole della trigonometria, coerente alla impossibilità geometrica di costruire il triangolo; e ciò per non aver letta altra geometria all'infuori di quella di Euclide. Il che solo basterebbe a dimostrare con una prova di fatto irrefragabile la insufficienza degli elementi del greco geometra nello stato attuale delle Matematiche.

Il Cap. VIII che tratta delle ragioni e proporzioni è rimasto quasi lo stesso; solamente abbiamo esposto sotto forma di teorema uno scolio, in cui si dimostrava che in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è uguale a quello de' medii, anche quando le grandezze sono incommensurabili. La dimostrazione è stata rifatta in un modo più rigoroso, e se non c' inganniamo, le particolarità nelle quali siamo entrati a questo riguardo, e l'insieme di tutta la dottrina esposta in quel capitolo, ci sembrano tali da metter fuori dubbio che i termini di una proporzione possono considerarsi come numeri, anche quando si tratta di grandezze incommensurabili. Ciò vien negato non solo dagli Euclidisti, ma anche da un dotto geometra moderno, il quale a questo proposito dice che « se si ponga mente alla incommensurabilità » in che talora si trovano le quantità continue, non sempre » ci è dato sostituir numeri alle linee in proporzione; nè » basta il caso nel quale i quattro termini d'una proporzio- » ne possono divenir numeri per inferirne che sempre tali » termini potranno considerarsi come numeri, mentre nel

» caso della incommensurabilità non v'ha modo di calcolo che
» valga a somministrarli (*).

Ma ognun vede che in un argomento di tanta importanza non bastano le semplici asserzioni, e conveniva dimostrare la insussistenza degli argomenti addotti da illustri geometri moderni, con i quali si prova che la teorica generale delle ragioni e proporzioni poggiata sull'Aritmetica può esser applicata non solo alle quantità discrete, ma anche alle continue. Una tal dimostrazione non è stata mai fatta, nè poteva farsi, perchè gli oppositori credono di aver detto tutto dicendo che le quantità incommensurabili non si possono esprimere in numeri esattamente, senza riflettere che per estendere la teorica aritmetica delle proporzioni alle quantità incommensurabili e per applicarla alla geometria non è necessario di fare *il calcolo effettivo* delle quantità delle ragioni, e per conseguenza de' termini di una proporzione, ma un tal calcolo occorre solo quando si vogliono applicare alla pratica i teoremi dimostrati in geometria. Basterà aver accennate queste cose, non potendo qui discuterle a rigore: solamente non vogliamo tacere che la teorica delle ragioni e proporzioni vuol essere di sua natura esposta in un modo generale, ed indipendente da qualunque considerazione geometrica; e ciò non può ottenersi che in due modi, o ricorrendo al principio degli egualmente moltiplici di Euclide, cioè ad un teorema che questo geometra non ha dimostrato, o ricorrendo all'Aritmetica, la quale valendosi delle frazioni continue non solo arriva a dare con chiarezza e semplicità quella teorica, applicandola anche alle quantità incommensurabili, ma offre il mezzo di dimostrare con estrema facilità il teorema di Euclide. Fuori di queste due vie non v'ha mezzo che valga a fondare una teorica generale delle ragioni e proporzioni, e nel fatto il lodato geometre più sopra citato avendo abbandonato l'una e l'altra via ha dovuto ricorrere alle costruzioni geometriche per dimostrare i teoremi relativi alle proporzioni.

Alla fine del Cap. X abbiam riunito le proprietà principali del triangolo rettangolo, alcune delle quali si trovavano esposte nel Cap. XI. Questa modificazione ci è stata suggerita dall'insegnamento, e dal riflettere che quando si è dimostrato che la perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto divide il triangolo rettangolo in due triangoli simili fra loro ed a tutto il triangolo, conseguenze di questo teorema sono appunto le proprietà, di cui parliamo; nè va-

(*) *Corridi, Geometria* p. IX.

le dissimularle per impedire che vi siano. Oltre a ciò il teorema di Pitagora non appartiene ai soli quadrati descritti sopra i tre lati del triangolo rettangolo, ma si estende a tutti i poligoni simili, ed anche ai cerchi che hanno que' lati per diametri, onde la dimostrazione di queste verità deve cavarsi dai triangoli simili, se si vuole ridurre la scienza a principii generali, e non ad una raccolta di casi particolari disposti ad arbitrio del compilatore. Del resto abbiam voluto conservare ancora la dimostrazione antica del teorema pitagorico, avuto riguardo alla sua celebrità.

Il Cap. XI è rimaso come era; solamente vi si è aggiunto qualche scolio, e qualche noterella a piè di pagina, a fine di mostrare ai giovani che le poche proposizioni di quel capitolo contengono in un modo svelto, semplicissimo, e senza alcun calcolo, tutto il pesantissimo ed intricatissimo secondo libro degli Elementi di Euclide, che forma la disperazione degli studenti, e che così facilmente sfugge dalla memoria. La sola proposizione ottava del libro accennato è stata messa in una nota alla fine della nostra opera, perchè non necessaria; e questa stessa proposizione si troverà dimostrata in un modo semplicissimo, e senza quella tremenda enunciazione e dimostrazione euclidea.

Nel Cap. XIII ci siamo sforzati di esporre in modo più semplice e più rigoroso la difficile teorica delle intersezioni e dei contatti de' cerchi, la quale, se non andiamo errati, ci sembra esposta in un modo poco rigoroso nelle moderne istituzioni di geometria. Euclide ha racchiusa una siffatta teorica in un picciolissimo numero di proposizioni, che la rendono monca ed oscura, siccome apparisce ancora dal giudizio di un dottissimo commentatore ed ammiratore di Euclide, il P. Clavio, il quale in un suo scolio mostra di dubitare della esattezza della teoria euclidea dei contatti. Ed a questo proposito non vogliamo tacere un' altra osservazione da noi fatta sullo stesso libro 3.° di Euclide. Il geometra greco qualche volta assume postulati e principii tutt' altro che evidenti, e per contrario spesso non si permette le operazioni più semplici senza averle prima giustificate con la risoluzione di un problema; così nel libro 1.°, non si permette il trasporto dell' intervallo, la quale pedanteria, di quanta conseguenza sia in tutto il tessuto del suo lavoro, non è qui il luogo di esaminare. Similmente nel libro 3.° non si permette di considerare nel cerchio il suo centro senza prima aver dato il modo di trovarlo, il che significa assumere una metà soltanto della definizione del cerchio; onde è obbligato a dar prin-

GEOMETRIA PIANA

CAPITOLO PRIMO

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

1. *Grandezza* dicesi tutto ciò ch'è suscettivo di accrescimento e di diminuzione; tutto ciò, di cui si può assegnare o concepire il doppio o la metà, il triplo o la terza parte, ecc.

2. Grandezza *discreta* o *Numero* è la collezione di più cose, o di più parti simili e separate; come dieci stelle, sette cavalli, otto ducati, ecc., e si chiama *unità* una di quelle cose, o di quelle parti simili.

3. Grandezza *continua* è quella, che si considera come un sol tutto, senza distinzione di parti. Si manifestano in tal modo l'*estensione* de'corpi in generale, ed in particolare i loro contorni, e le *facce* che ne determinano le forme.

4. Il carattere proprio e distintivo dell'estensione è dunque riposto nel legame o *continuità* delle parti, che non si possono nè scorgere, nè numerare. Al contrario nel numero si considera solamente la *quantità*, ossia si considera quante cose o parti simili contiene.

5. E poichè ogni grandezza si può ridurre a numero, paragonandola ad un'altra della stessa specie presa per unità, è addivenuto che la parola *quantità* si è appropriata alla grandezza in generale, chiamandosi *quantità continua* la grandezza considerata come continua, per distinguerla dal numero, che si è chiamato *quantità discreta* o *discontinua*.

6. Le scienze *Matematiche* hanno per soggetto le grandezze. Esse esaminano le relazioni di sito, le proprietà che presentano le forme dei corpi in quanto alla loro estensione, ed i rapporti di quantità che risultano dal loro confronto.

7. Ciascuna delle scienze accennate ha un nome particolare secondo l'oggetto che contempla. Base e fondamento di tutte è l'*Aritmetica* che considera specialmente i numeri. Di questa non ci occuperemo in questo luogo, ma supporremo che si conoscano le operazioni principali di essa; le quali bastano a far comprendere pienamente quanto esporremo intorno alla *Geometria*.

8. La Geometria considera la grandezza continua; e perciò vien chiamata la *scienza dell'estensione*.

9. L'estensione ha lunghezza, larghezza, e profondità.

10. La *linea* è una lunghezza senza larghezza.

11. I *termini* o estremità di una linea si chiamano *punti*.

Il punto non ha dunque alcuna estensione.

12. La *linea retta* è la più breve di tutte quelle linee, che si possono condurre da un punto ad un altro.

Quindi la *distanza* di due punti è la lunghezza della linea retta che unisce questi due medesimi punti.

13. Ogni linea che non è retta, nè composta di linee rette, dicesi *linea curva*.

Così (fig. 1) *AB* è una linea retta, *ACDB* una linea *spezzata* o composta di linee rette, *AEB* è una linea curva.

14. La *Superficie* è ciò che ha lunghezza e larghezza, senza profondità.

15. La *Superficie piana*, o più semplicemente il *Piano*, è quella superficie nella quale prendendo due punti ad arbitrio, ed unendoli con una linea retta, questa linea trovasi sempre tutta intera nella superficie.

16. Ogni superficie, che non è piana, nè composta di superficie piane dicesi *Superficie curva*.

17. *Solido* o *corpo* è ciò che ha lunghezza, larghezza e profondità.

18. La *circonferenza del cerchio* (fig. 2) è una linea curva *AFD* esistente in un piano, i cui punti sono tutti ugualmente distanti da un punto interno *C*, che si chiama *centro*.

19. La superficie piana terminata d'ogni intorno della circonferenza dicesi *cerchio* o *circolo*.

20. La retta condotta dal centro ad un punto della circonferenza appellasi *raggio*.

21. Ogni retta come *AB* che passa pel centro *C*, e termina alla circonferenza dall'una e dall'altra parte, si dirà *diametro*.

22. In virtù della definizione del cerchio è evidente che tutti i raggi *AC*, *CE*, *CD*, *CB*, *CF*, ecc. sono uguali fra loro, come pure tutti i diametri, e che ogni diametro è doppio del raggio.

23. Una porzione qualunque della circonferenza dicesi *arco*.

24. La *corda* o *sottesa* dell'arco è la linea retta che unisce le sue due estremità.

25. La circonferenza del cerchio è la sola linea curva che si considera negli elementi di geometria. Essa può concepirsi come generata dal moto di una linea retta situata in un piano, e di cui una estremità rimane fissa nel centro, mentre l'altra gira finchè ritorni al suo primo luogo.

26. Le definizioni del punto, della linea, della superficie, e del solido hanno la loro origine nelle idee comuni a tutti gli uomini, ma siccome ciò non apparisce a prima vista, così hanno bisogno di essere dilucidate, affinchè si possa veder chiaramente che i primi inventori ricavarono dalle idee accennate i principj ed i germi delle conoscenze geometriche. Una siffatta dilucidazione si troverà nella nota qui sottoposta (*).

Spiegazione di alcuni termini.

27. Il metodo che comunemente si adopera nella esposizione della geometria, consiste specialmente nel ridurre le verità di questa scienza ad altrettante proposizioni, cui si danno diversi nomi, secondo la natura di esse.

(*) Tutto ciò che non è corpo, o che non è attributo di un corpo non può cadere sotto i nostri sensi. Altronde se si togliesse ad un corpo la lunghezza, o la larghezza, o la profondità, esso cesserebbe di esistere. Ciò non ostante la geometria considera il punto come non avente alcuna estensione, la linea come estesa solamente in lunghezza, e la superficie come una lunghezza e larghezza senza profondità. Da ciò alcuni filosofi hanno dedotto che i punti, le linee, ele superficie sono pure astrazioni, che non possono appartenere ad alcuno oggetto posto fuori di noi; e quindi sono passati a metter in dubbio la certezza e la utilità della geometria medesima, negando l'esistenza delle parti dell'estensione, di cui essa esamina le proprietà.

Tutte queste difficoltà svaniscono, ove si rifletta che il punto, la linea, e la superficie esistono realmente, abbenchè non si possono separare dal corpo, di cui sono gli attributi. Infatti siasi qualunque il corpo, che si considera, esso è necessariamente terminato, senza di che non sarebbe distinto dallo spazio indefinito. Ora, i termini, che lo circoscrivono, sono le superficie, le quali hanno per termini le linee; e queste stesse vanno a terminare ne'punti. E non solamente questi termini esistono, ma di più cadono sotto ai nostri sensi, dappo chè col loro mezzo arriviamo a conoscere la figura dei corpi.

Che se poi la geometria considera i punti indipendentemente dalle linee, le linee indipendentemente dalle superficie, e le superficie indipendentemente dai sol di, ciò deriva dalla limitazione del nostro intelletto, che non potendo comprendere distintamente più cose ad un tratto, è costretto a separare per astrazione ciò che la natura ha congiunto con indissolubile legame. L'utilità di questa astrazione si manifesta in infiniti casi, ne'quali si deve esaminare la sola lunghezza, o la sola larghezza, o finalmente la sola profondità, trascurando le altre due; come avviene quando si vuol sapere l altezza di una torre senza aver riguardo alla sua larghezza, ed alla sua lunghezza, la larghezza di un fiume senza la lunghezza e profondità dello stesso, ecc. Da ciò si vede che la geometria ha il suo fondamento nelle idee comuni a tutti gli uomini; e che lo studio di essa è di una immensa utilità.

28. *Teorema* è una proposizione, la quale diviene evidente per mezzo di un ragionamento, che chiamasi *dimostrazione*.

29. *Problema* è una quistione proposta, che esige una *soluzione*.

30. *Lemma* è una proposizione, che si premette per facilitare la dimostrazione di un teorema, o la soluzione di un problema.

31 *Corollario* è la conseguenza, che si deduce da una, o da più proposizioni.

32. *Scolio* è una osservazione, che si fa sopra una o più proposizioni precedenti, diretta a far conoscere il loro legame, la loro generalità, o la loro limitazione. Talvolta lo scolio si premette come preparazione alle proposizioni che seguono, e talvolta ancora si adopera per legittimare o per dichiarare un qualche principio.

33. *Ipotesi* significa supposizione. Ogni teorema costa di una ipotesi che si mette in principio, cioè nella enunciazione di esso teorema, e di una *conclusione* o conseguenza, che se ne deduce.

34. Tutt'i termini fin qui spiegati derivano dalla lingua greca: l'uso, che di essi si farà in appresso, metterà in piena luce il loro significato.

35. La geometria non potrebbe giugnere a dimostrare i teoremi, ed a risolvere i problemi senza appoggiarsi ad alcuni principii che sono inerenti al soggetto proprio di questa scienza; e che si devono premettere ed accettare senza alcuna dimostrazione; poichè se tutto si dovesse dimostrare, non esisterebbe più alcuna scienza. I principii, di cui è parola, si contengono negli *assiomi* e ne' *postulati* e *dimande*.

Degli Assiomi.

36. *Assioma* è una proposizione, che non ha bisogno di dimostrazione.

37. La Geometria si vale di due specie di assiomi, cioè di quelli che le sono comuni coll'Aritmetica; e di quelli che spettano ad essa sola.

38. Gli assiomi comuni all'Aritmetica ed alla Geometria si chiamano ancora *notizie comuni*, e sono i seguenti:

I. Il tutto è maggiore di qualunque sua parte, ed è uguale alla somma delle parti, nelle quali è stato diviso..

II. Due quantità uguali ad una terza sono uguali fra loro.

III. Se a quantità uguali si aggiungono, o si tolgono altre uguali o una medesima comune ad ambedue, le somme, o i residui saranno uguali.

IV. Se a quantità disuguali si aggiungono, o si tolgono quantità uguali, o una stessa ad entrambe comune, le somme, o i residui saranno disuguali;

V. Le quantità che sono doppie, triple, quadruple, ecc., di una medesima quantità, sono uguali fra loro.

VI. Le quantità che sono la metà, la terza parte, la quarta parte, ecc., di una stessa quantità, sono uguali fra loro.

39. Gli assiomi proprii della Geometria sono:

I. Due grandezze sono uguali quando *soprapposte* una all'altra coincidono in tutta la loro estensione.

II. Da un punto ad un altro non si può condurre che una sola linea retta: ovvero, due linee rette non chiudono spazio.

III. Due linee rette non possono avere un *segmento*, ossia una parte comune senza coincidere l'una coll'altra in tutta la loro estensione: ovvero, una linea retta non può prolungarsi dall'una e dall'altra parte che in un solo modo.

40. *Corollario.* Da ciò si deduce che due punti bastano a determinare la *direzione* o posizione di una linea retta; e per conseguenza due linee rette che hanno due punti comuni coincidono l'una coll'altra in tutta la loro estensione, e formano una sola e medesima linea retta.

41. *Scolio.* È facile vedere che i tre assiomi precedenti dipendono il primo dalla nozione della estensione, e gli altri due da quella della linea retta, nozione ch' è chiara in tutti gli uomini, abbenchè non possa darsi una definizione esatta della linea retta, appunto perchè non può definirsi in che consiste il risultamento immediato della sensazione, che ci fa conoscere la via più corta per andare da un punto ad un altro.

Dei Postulati.

42. *Postulati* diconsi alcune operazioni così semplici che ognuno ammette la possibilità di effettuarle; e si effettuano realmente per mezzo della riga, e del compasso. Essi sono:

I. Condurre una linea retta da un punto ad un altro.

II. Prolungare una retta terminata.

III. Con un dato punto preso per centro, e con un dato intervallo come raggio descrivere un cerchio.

43. *Scolio.* Le tre precedenti operazioni appartengono propriamente alle pratiche meccaniche. La geometria non insegna a descrivere la linea retta, ed il cerchio, ma dimanda che si sappiano descrivere *accuratamente* prima di applicarsi allo studio di essa. Adunque le descrizioni della linea retta, e del cerchio sono problemi, ma non geometrici: si dimanda alla meccanica la loro soluzione, poi nella geometria s'insegna l'uso che deve farsene. E si gloria la geometria di eseguire così grandi cose appoggiandosi a pochi principii presi altrove. È dunque fondata la geometria sulla meccanica pratica, e non è altro che quella parte della meccanica universale, la quale espone e dimostra l'arte di misurare *accuratamente* (*).

44. *Corollario.* Per mezzo dei tre postulati precedenti si può facilmente descrivere una retta uguale alla somma, o alla differenza di due rette date (fig. 3).

(*) Newton *Princip. Mathem.* nella prefazione.

1° Sieno le due rette date DE, FG. Si tiri una retta indefinita, sulla quale si prenda un punto A ad arbitrio; indi si faccia centro in A e con un raggio AB uguale a DE si descriva un arco di cerchio che tagli la retta indefinita in un punto B. Parimente si faccia centro in B, e con un raggio uguale a FG si descriva un altro arco di cerchio che tagli la retta indefinita in un punto C. È evidente che la retta AC sarà la somma delle rette AB, BC, e per conseguenza delle due rette date DE, FG.

2° Per avere una retta uguale alla differenza di due rette date DE, FG si tiri una retta indefinita, sulla quale si prenda nel modo sopraddetto una parte AB uguale alla maggiore DE; poi a partire dal punto B si prenda sopra AB una parte BH uguale alla minore FG, è manifesto che la retta AH sarà la differenza delle rette AB, BH, e per conseguenza delle due rette date DE, FG.

Spiegazione di alcuni segni.

45. Per servire alla brevità del discorso faremo uso talvolta dei segni qui appresso:

1°. Il segno $=$ indica l'uguaglianza di due quantità, così $A=B$ si pronunzia, *A e' uguale a B*: quando poi si vuol indicare che A *e' maggiore di* B, si scrive $A>B$: all'opposto $A<B$ dinota che A *e' minore di* B.

2°. Il segno $+$ significa *più*, e serve a dinotare l'addizione, onde $A+B$ rappresenta la somma delle due quantità A e B.

3°. Il segno $-$ si pronunzia *meno*, ed indica la sottrazione: così $A-B$ rappresenta la differenza delle due quantità A e B, ovvero ciò che resta togliendo B da A.

4°. Il segno $\times$ indica la moltiplicazione; così $A\times B$ si pronunzia *A moltiplicato* per B, ed indica che A si deve moltiplicare per B.

5°. Finalmente $A:B$, oppure $\frac{A}{B}$ si pronunzia, *A diviso per B*, e vuol dire che A si deve dividere per B.

46. *Scolio*. Oltre ai segni precedenti si fa uso talvolta delle lettere con gli accenti. Supponiamo, per esempio, che con le lettere A, B, C siensi indicati certi punti, o linee; e che occorra indicare punti, o linee analoghe: in tal caso si adoperano le stesse lettere con gli accenti A', B', C', che si pronunziano *A prima*, *B prima*, *C prima*. Talvolta si ricorre alle stesse lettere con due accenti, che si pronunziano, *A seconda*, *B seconda*, *C seconda*, con tre accenti, con quattro, ecc.

Deve ancora avvertirsi che in alcuni casi si adoperano le lettere majuscole insieme con le minuscole. Si distinguono allora nel discorso pronunziando la parola *grande* dopo le majuscole, e la parola *piccola* dopo le minuscole.

CAPITOLO II.

DELLE RETTE, CHE S'INCONTRANO, E DELLE RETTE PARALLELE.

47. Si è già veduto (n° 40) che due linee rette non possono avere due punti comuni senza coincidere l'una con l'altra in tutta la loro estensione. Quindi due linee rette separate e distinte non potranno mai avere più di un punto comune: e se hanno di comune un sol punto si dice che le due linee s'incontrano, o che concorrono, oppure che s'intersegano o si tagliano; ed il punto comune si chiama punto d'incontro, di concorso, d'intersezione.

48. *Definizione* I. Quando due rette *AB*, *AC* (fig. 4) s'incontrano, in un piano, la quantità più o meno grande, di cui esse si allontanano l'una dall'altra, quanto alla loro situazione, dicesi *Angolo*.

Le due rette medesime si chiamano *lati* dell'angolo, ed il punto ad esse comune appellasi *vertice* dell'angolo. (*)

49. Due angoli sono uguali, allorchè situando il vertice dell'uno sul vertice dell'altro, ed applicando un lato sopra un lato, i rimanenti due lati si confondono in una medesima direzione.

50. Da ciò risulta evidentemente che la grandezza di un angolo non dipende dalla lunghezza dei suoi lati. Quando si è detto basta per acquistare una nozione compiuta dell'angolo, e per comprendere facilmente tutte le conseguenze che ne derivano, poco importando che non possa darsi una esatta definizione di esso angolo.

51. L'angolo s'indica alle volte colla sola lettera (fig. 4) del vertice, dicendosi l'*angolo A*. Ma siccome accade spesso che più angoli hanno un medesimo vertice, così si è convenuto d'indicare ciascun angolo con tre lettere, dicendosi l'angolo *BAC*, o che vale lo stesso *CAB*, avvertendo sempre di mettere in mezzo la lettera del vertice.

52. Se due angoli *BAC*, *CAD* (fig. 5) hanno lo stesso vertice *A*, un lato comune *AC*, e gli altri due lati *AB*, *AD*, situati l'uno da una parte, e l'altro dall'altra del lato comune *AC*, l'angolo *BAD* sarà evidentemente la somma dei due angoli *BAC* *CAD*. Quindi l'angolo *CAD* sarà la differenza dei due angoli *BAD*, *BAC*.

53. Supponiamo che dal punto *A* (fig. 6) si sieno tirate le rette *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, ecc., in guisa che gli angoli *BAC*, *CAD*. *DAE*, ecc., risultino uguali fra loro. È manifesto che l'angolo *DAB* sarà

(*) Euclide ha definito l'angolo nel modo seguente:

« L'angolo piano è l'inclinazione, che nel piano hanno tra loro due linee, » che scambievolmente si toccano, e non sono poste per diritto. »

Questa definizione riducesi a sostituire alla parola angolo, che si doveva definire, quella d'inclinazione, che ha pure bisogno di essere definita. Del resto è impossibile dare una definizione esatta dell'angolo, appunto come non si può dare una definizione esatta della linea retta da cui dipende la formazione dell'angolo. È questa una imperfezione inevitabile de' principii fondamentali della scienza.

il doppio dell'angolo *BAC*, l'angolo *EAB* ne sarà il triplo, e così in progresso. All' opposto l'angolo *BAC* sarà la metà dell'angolo *BAD*, la terza parte dell'angolo *BAE*, e così di seguito.

Da ciò si deduce che gli angoli si possono sommare, sottrarre, moltiplicare, e dividere come le altre quantità.

54. *Definizione* II. Quando una retta *CA* (fig. 7) incontra un' altra *BD*, in guisa che gli angoli *adiacenti CAB*, *CAD* sieno uguali fra loro; ciascuno di essi dicesi *angolo retto*, e la linea *CA* è detta *perpendicolare* o *normale* alla linea *BD*.

55. *Definizione* III. Se dal punto *A* si conduca un'altra retta *AE*, l'angolo *BAE* maggiore del retto *BAC* chiamasi *angolo ottuso*; l'angolo *EAD* minore del retto dicesi *angolo acuto*. La linea *AE* poi, che forma angoli adiacenti disuguali colla retta *BD* si dirà essere *obliqua* a questa retta.

56. *Definizione* IV. Sotto la denominazione di *angoli obliqui* si comprendono gli angoli acuti ed ottusi.

57. L'esistenza di una retta perpendicolare ad un'altra si potrebbe assumere come evidente, ma è facile assicurarsene nel modo seguente.

Si concepisca che la retta *EA* (fig. 7) sia posta sopra *AD* facendo con questa una sola linea retta, e che poi, restando *AD* immobile, la linea *EA* giri intorno al punto *A* verso il punto *B*. Finchè la linea *EA* coincide con *AD*, l'angolo formato da queste rette è *zero*, ma appena *EA* comincia a girare, tutti i punti di questa retta, eccetto il punto *A*, si distaccano ad un tempo dalla retta *AD*, ed allora l'angolo comincerà a formarsi. Siffatto angolo sarà acutissimo da principio, ma andrà crescendo a misura che gira la retta *EA*; e questo aumento non cesserà se non quando la retta *EA* sarà giunta a coincidere col prolungamento *AB* della retta *AD*. Quindi l'angolo *EAD* che nel principio del movimento era acuto potrà divenire ottuso; e per conseguenza dev'esistere una posizione della retta *EA*, in cui gli angoli adiacenti risultano uguali, ovvero dev'esistere una retta perpendicolare a *BD*. Or siccome la posizione accennata è *unica*, così ne consegue evidentemente che

Da un punto preso sopra una retta data non si può innalzare su questa retta che una sola perpendicolare.

PROPOSIZIONE I — *TEOREMA*.

58. *Gli angoli retti sono tutti uguali fra loro* (fig. 7).

Dimostrazione. Sieno le due rette *HO*, *CA* respettivamente perpendicolari alle due rette *FG*, *BD*. Dico che gli angoli retti *FOH*, *BAC* sono uguali fra loro.

Imperciocchè, se le rette *FG*, *BD* s'immaginino soprapposte l'una all'altra in modo che il punto *O* dell'una coincida col punto *A* dell'altra, la perpendicolare *OH* dovrà pure coincidere colla perpendicolare *AC*; dappoichè se prendesse un altra direzione *AE*, allora da

cipio alla sua teorica col problema in cui si propone di trovare il centro di una data circonferenza. Per risolvere il quale problema, Euclide conduce una retta dentro il cerchio che prolunga sino alla circonferenza, dall' una e dall' altra parte; indi divide questa retta in due parti eguali, e pel punto di mezzo innalza una perpendicolare, che prolunga sino alla circonferenza d' ambe le parti; finalmente divide questa perpendidolare in due parti eguali, e dimostra per assurdo che il punto di mezzo è il centro richiesto. Ora, ognun vede che questa soluzione suppone tacitamente che una retta non può incontrare la circonferenza del cerchio in più di due punti; perchè se la perpendicolare innalzata incontrasse la circonferenza in tre punti, uno de' quali fosse il punto di mezzo della retta, la soluzione accennata non potrebbe più sussistere. Intanto Euclide non ha parlato dell' incontro della retta col cerchio esplicitamente in alcun luogo, e solo dalla seconda proposizione del libro 3.° si può conchiudere che l' incontro si faccia in due punti; ma una tal proposizione suppone già trovato il centro del cerchio. Questa specie di circolo vizioso è conseguenza della smania di voler tutto dimostrare, che nel caso attuale si estende sino alle definizioni; poichè il problema di trovare il centro di una data circonferenza, non essendo considerato da Euclide come una applicazione delle teoriche, ma dovendo servirgli a giustificare il centro del cerchio nella dimostrazione de' teoremi, non poteva esser risoluto con rigore a prima giunta, e senza l' ajuto di alcuna proprietà.

Finalmente l' ultimo capitolo è divenuto più breve, perchè senza mistero abbiamo considerata la circonferenza del cerchio come un poligono regolare di un numero infinito di lati, dimostrando però che il considerare la circonferenza in tal modo equivale al principio di Archimede, che la circonferenza del cerchio è maggiore del perimetro di ogni poligono iscritto, ed è minore del perimetro di qualunque poigono circoscritto. Nulladimeno abbiamo conservata la dimostrazione genuina del geometra di Siracusa intorno alla misura del cerchio per dare ai principianti l' idea del metodo di esaustione.

Speriamo che la fatica da noi durata per rendere più facili ed ad un tempo più rigorosi gli elementi di geometria, ottenga l' aggradimento della gioventù studiosa, alla quale raccomandiamo di coltivare le Matematiche moderne, mettendo da parte le vecchie istituzioni, se vuole ricavare utilità vera dallo studio delle scienze esatte.

Ma siffatta raccomandazione non potrà produrre veruno effetto, se la gioventù non viene premunita contro l'influsso di alcuni pregiudizii radicati da lungo tempo in fatto di geometria, i quali con la loro inerzia resistono a qualsivoglia miglioramento delle istituzioni geometriche. Perocchè vi sono alcuni, che non volendo assolutamente ammettere negli elementi di geometria altri principii, ed altro genere di dimostrazioni che quelli tramandati da Euclide, considerano la geometria elementare come una scienza fatta da ventidue secoli, e di cui l'andamento e la dottrina non possono ricevere ulteriori perfezionamenti. Queste loro pretensioni si limitano ora alla sola geometria piana di Euclide, perchè sarebbe ormai cosa ridicola il parlare della solida di questo geometra, dopo le osservazioni di Roberto Simson, e gli scritti de'Matematici de' nostri giorni.

Quindi gridano allo scandalo se la geometria piana di Euclide non si pone nelle mani della gioventù, e sostengono che tutte le geometrie piane scritte dai Matematici moderni hanno *uno sbadiato color geometrico*, e però guastano e corrompono l'insegnamento! E pazienza se un autore moderno dovesse essere valutato col modulo della geometria euclidea; ma avviene che gli Euclidisti a forza di portare a cielo, oltre il dovere, gli antichi, si sono persuasi di avere essi soli il dritto d'interpetrare le loro opere; e quindi hanno fatto tante chiose ad Euclide che si è formato nel loro capo una geometria che non va sempre d'accordo con quella del greco geometra. Infatti, volendo darne qualche esempio, essi, per dritto di buona amicizia o di protezione, regalano al testo di Euclide vocaboli che non vi si trovano, come *raggio* ed *arco*, senza trovar neanco necessario di definire queste voci, e nondimeno biasimano il Peyrard per aver fatto altrettanto nella traduzione delle opere di Archimede. Accusano i geometri moderni di concepire innalzata la perpendicolare, quando dimostrano che la somma degli angoli adiacenti è uguale a due retti, ma non riflettono che un siffatto concetto trovasi in Euclide, il quale pone come assioma che tutti gli angoli retti sono eguali, vale a dire assume come evidente che da un punto di una retta qualunque si può innalzare una perpendicolare, e di più non se può innalzare che una sola. Negate tutto questo, e vedrete se potrà più reggere l'assioma di Euclide: laonde gli Euclidisti volendo censurare i moderni scavano, senza avvedersene, le fondamenta della geometria euclidea. E così pure dichiarano erronea la distinzione, che fanno i geometri moderni, delle figure uguali dalle figure e-

qulvalenti, mentre lo stesso Euclide distingue le figure in eguali, ed in eguali e simili. Se voi dite che il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma de' quadrati de' cateti, vi si grida la croce addosso, e pretendesi che si debba dire non *somma* di quadrati, ma quadrati *presi insieme*, abbenchè Euclide dica semplicemente che il quadrato dell'ipotenusa è uguale a' quadrati de' lati che comprendono l'angolo retto. Questa puerilità nasce da un'altra pretensione assai più curiosa, ed è che debba esser proscritto dalla Geometria tutto ciò che ha odore di Aritmetica, essendo ormai noto che gli Euclidisti non vogliono in geometria sentir parlare di considerazioni aritmetiche, che credono improprie e nocive alla purità geometrica. Quindi a maggior ragione proscrivono la distinzione delle quantità commensurabili dalle incommensurabili, e tutto ciò che sente di misura; come se la parola geometria non suonasse *misura dell'estensione*, e non avesse Euclide scritto il libro decimo, che tratta delle quantità incommensurabili, e non avesse Archimede data la misura del cerchio! Fino la parola *distanza* adoperata dai geometri moderni fa ombra a cotesti censori, e nondimeno essa trovasi in una definizione del libro 3 di Euclide, senza che questo geometra abbia dimostrato che la perpendicolare abbassata da un punto sopra una retta misura la distanza del punto alla retta. Non vi sarebbe mai fine, se si volessero qui enumerare tutte le censure fatte dagli Euclidisti ai geometri moderni, prendendo per tipo la geometria di Euclide, o per meglio dire la geometria che spacciano sotto questo nome; e basterà dire che hanno avuto il coraggio di biasimare financo Eulero, il Briareo delle Matematiche, perchè nelle sue opere immortali ha fatto uso frequente di corollarii, e di scolii, senza riflettere che i più grandi Matematici moderni quando vogliono indicare che un' libro è scritto con somma chiarezza ed eleganza sogliono dire: *è un' opera Euleriana*!

Si può ora comprendere perchè gli Euclidisti dicano che nelle geometrie moderne manca il *rigore*, che pretendono trovarsi nel solo Euclide. Essi danno a quel vocabolo un significato tutto particolare, che non poteva mai capire nella mente de' moderni scrittori di elementi geometrici; e perciò nelle opere moderne di geometria non può trovarsi ciò che i loro autori erano ben lontani dal concepire.

Ma fortunatamente queste assurde pretensioni vanno sempre più perdendo terreno: ormai la stessa geometria piana di Euclide non s' insegna che da qualche Antiquario, e fino gl' Inglesi, un tempo così appassionati di Euclide, hanno depo-

to i loro vecchi pregiudizii a questo riguardo, ed al più più alcuni di essi si contentano di dire che i soli quattro primi libri di Euclide si possono insegnare! questa transazione nasce dall'essersi quei dotti convinti, sulle opere dei matematici moderni, che la teorica delle ragioni e proporzioni non può trattarsi con l'oscuro e pesante apparato degli egualmente moltiplici, e che i rapporti delle figure esposti nel lib. 6 di Euclide si risentono fortemente di anticaglia, mentre al contrario ne' libri moderni queste dottrine, che costituiscono la parte, per dir così, vitale degli elementi di geometria, si trovano dimostrate con grande facilità e chiarezza. Si dovrà dunque mettere nelle mani della gioventù una frazione della geometria piana di Euclide? Ecco dove conduce la forza di un'antica tradizionale opinione! Non potendo salvar tutto si viene ad una transazione, con la quale si sagrifica la parte vitale della geometria euclidea, e si propone la conservazione de' soli primi quattro libri, come se questi potessero tollerarsi dopo i progressi fatti dalle Matematiche! Ma noi non possiamo discutere queste cose con l'estensione conveniente; e venendo alla conclusione diremo che le pretensioni degli Euclidisti possono imporne a quelli che non conoscono lo stato attuale delle scienze esatte, ma non potranno mai reggere ad un esame rigoroso, che che si possa dire in contrario da qualche appassionato lodatore degli antichi.

N. B. Volendosi limitare al puro necessario si potranno lasciare in una prima lettura tutti i paragrafi preceduti da un asterisco.

uno stesso punto *A* si potrebbero innalzare due perpendicolari *AC*, *AE* sopra una medesima retta *BD*. Ma ciò è impossibile (n.° 57), dunque la retta *OH* deve coincidere colla retta *AC*; e per conseguenza gli angoli *FOH*, *BAC* sono uguali (n.° 49). Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE II — *TEOREMA*.

59. *Se una retta incontra un'altra, la somma degli angoli adiacenti è uguale a due angoli retti* (fig. 7).

Dim. La retta *EA* incontri la retta *BD* nel punto *A*. Dico che gli angoli adiacenti *EAB*, *EAD* presi insieme sono uguali a due retti.

Perocchè, se la retta *EA* è perpendicolare a *BD*, la proposizione enunciata risulta evidente, essendo retto ciascuno dei due angoli adiacenti. Suppongasi dunque che *EA* sia obliqua a *BD*, e dal punto *A* si concepisca innalzata sopra *BD* la perpendicolare *AC*.

L'angolo *EAB* supera il retto *BAC* dell'angolo *CAE*: al contrario l'angolo *EAD* è più piccolo del retto *CAD* dello stesso angolo *CAE*.

Dunque levando l'eccesso dell'angolo *EAB* sopra un retto, ed aggiungendo questo eccesso all'angolo *EAD*, la somma degli angoli adiacenti *EAB*, *EAD* sarà uguale a due retti. Il che bisognava dimostrare.

60. *Corollario*. Apparisce da questo teorema che se da un medesimo punto *A* (fig. 8) di una retta *BD*, e da una medesima parte si tirino quante rette si vogliano *AE*, *AG*, *AH*, ecc., tutti gli angoli consecutivi *BAE*, *EAG*, *GAH*, *HAD*, presi insieme saranno uguali a due retti; dappoichè sono uguali a due angoli adiacenti *BAH*, *DAH*.

61. *Definizione*. Due angoli si dicono *supplementari*, quando la loro somma equivale a due angoli retti; si dicono poi *complementari*, se equivalgono ad un angolo retto.

PROPOSIZIONE III — *TEOREMA*.

62. *Se dallo stesso punto* C *della retta* CD *si tirino a parti contrarie le rette* CA, CB, *in guisa che la somma degli angoli adiacenti* DCA, DCB, *sia uguale a due retti, le linee* AC, CB *formeranno una sola retta* AB (fig. 9).

Dim. Perocchè se *CB* non è il prolungamento di *AC*, lo sia *CF*. Essendo dunque *ACF* una linea retta che viene incontrata dalla retta *DC* nel punto *C*, sarà (n° 59) la somma degli angoli adiacenti *ACD*, *FCD* uguale a due retti. Ma per ipotesi è pure uguale a due retti la somma degli angoli *ACD*, *DCB*, dunque la prima somma sarà uguale alla seconda (n.° 38). Epperò se si tolga il comune an-

golo *ACD*, resterà (n.° 38) l' angolo *DCF* uguale all' angolo *DCB*, cioè il tutto uguale alla parte ; il che non può sussistere (n.° 38). Quindi *CB* è il prolungamento di *AC*, ovvero *AC* e *CB* formano una sola linea retta. Il che bisognava dimostrare (*).

PROPOSIZIONE IV — *TEOREMA*.

63. *Se due rette si tagliano scambievolmente, gli angoli opposti al vertice sono uguali* (fig. 10).

Dim. Sieno *AB*, *CD* due linee che si tagliano in *O*, dico che gli angoli *opposti al vertice*, o *verticali DOA*, *BOC* sono uguali fra loro, come pure gli angoli *AOC*, *DOB*.

Infatti la retta *AO* incontrando la retta *CD* nel punto *O*, fa con questa i due angoli adiacenti *DOA*,*AOC* uguali a due retti (n.°59). Parimente la retta *CO* incontrando la retta *AB* nello stesso punto *O*, fa con questa i due angoli adiacenti *AOC*, *BOC* uguali a due retti. Se dunque si toglie il comune angolo *AOC*, resterà l'angolo *DOA* uguale all' angolo *BOC* (n.° 38). Nello stesso modo si dimostrerà che l' angolo *AOC* è uguale all' angolo *DOB*. Dunque gli angoli opposti al vertice sono uguali fra loro. Il che bisognava dimostrare.

64. *Corollario*. Apparisce da questa dimostrazione che i quattro angoli formati intorno al punto d' intersezione di due rette che si tagliano, equivalgono a quattro angoli retti. Epperò se per lo punto accennato si tirino quante rette si vogliano, la somma di tutti gli angoli consecutivi sara uguale a quattro retti.

PROPOSIZIONE V — *TEOREMA*.

65. *Se da un punto* O *di una retta* AB *si tirino a parti contrarie due rette* OD, OC, *in guisa che siano uguali gli angoli verticali* AOC, DOB, *o pure gli angoli* BOC, DOA, *le dette linee formeranno una sola e medesima linea retta* (fig. 10).

Dim. Perocchè, essendo per ipotesi l' angolo *AOC* uguale all' angolo *DOB*, se si aggiunga ad entrambi il comune angolo *BOC*, sarà la somma degli angoli *AOC*, *BOC* uguale alla somma degli angoli *DOB*, *BOC*: ma la prima somma è uguale a due retti (n° 59), dunque ancora la seconda sarà uguale a due retti ; e però (n° 62) le linee *OD*, *OC* formeranno una sola e medesima linea retta. Il che bisognava dimostrare.

(*) Le enunciazioni delle proposizioni saranno fatte sulle figure, quando messe sotto forma astratta riescono o troppo lunghe, o non così chiare come si conviene. L' obbligarsi costantemente ad enunciare astrattamente le proposizioni è una vera pedanteria, che non poche volte nuoce alla chiarezza delle idee, come può vedersi nelle enunciazioni di molte proposizioni di Euclide.

Delle rette parallele.

66. *Definizione. Rette parallele* si dicono quelle, che essendo in un medesimo piano, e prolungate indefinitamente dall' una, e dall' altra parte non s' incontrano mai.

67. *Scolio.* Quando una retta *GH* (fig. 11) taglia due altre *AB*, *CD*, gli otto angoli che ne risultano, vengono distinti con diversi nomi secondo la posizione che hanno rispetto alla secante. Laonde di quelli otto angoli quattro diconsi *esterni*, perchè fuori delle rette *AB*, *CD*, e sono *AEG*, *GEB*, *CFH*, *HFD*; ed i rimanenti quattro si considerano a due a due, o dalla stessa parte della secante *EF*, o in parti opposte. Gli angoli *AEF*, *EFC* situati della stessa parte della secante si chiamano *interni dalla stessa parte*, come anche gli angoli *EFD*, *BEF*; e si chiamano poi *alterni* gli angoli *AEF*, *EFD*, o pure gli altri *BEF*, *EFC*, situati in parti contrarie della secante, e disposti a modo di *Z*.

PROPOSIZIONE VI. — *TEOREMA.*

68. *Se due rette sono segate da un' altra, in guisa che l' angolo esterno sia uguale all' interno ed opposto dalla stessa parte, esse linee saranno parallele* (fig. 11).

Dim. Le due rette *AB*, *CD* sieno segate dalla terza *GH*, e sia l'angolo esterno *GEB* uguale all' interno ed opposto dalla stessa parte *EFD*. Dico che sarà *AB* parallela a *CD*.

Imperocchè essendo l' angolo *GEB* uguale al suo verticale *AEF* (n.° 63) e l'angolo *EFD* uguale al suo verticale *CFH*, ne segue che l'angolo esterno *CFH* posto dall'altra parte della secante sarà uguale all'interno ed opposto corrispondente *AEF*. Laonde l'ipotesi fatta da una parte della secante, cioè che l'angolo esterno *GEB* è uguale all'interno corrispondente *EFD*, si riproduce *identicamente* dall'altra parte della secante medesima; e però diviene evidente che se le due rette *AB*, *CD* si potessero incontrare da una parte, dovrebbero ancora incontrarsi dall'altra parte, ed allora le rette *AB*, *CD* chiuderebbero spazio; il che è assurdo (n.° 39). Dunque *AB* è parallela a *CD*. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE VII — *TEOREMA.*

69. *Se due rette sono segate da una terza, in modo che gli angoli alterni sieno uguali fra loro, esse linee saranno parallele* (fig. 11).

Dim. Le rette *AB*, *CD* sieno segate dalla terza *GH* in modo che risultino uguali gli angoli alterni *AEF*, *EFD*. Dico che *AB* è parallela a *CD*.

Infatti, l'angolo *AEF* è uguale al suo verticale *GEB* (n.° 63): ma per ipotesi lo stesso angolo *AEF* è uguale all'angolo *EFD*;

dunque (n.° 38) ancora l'angolo *GEB* dovrà essere uguale all'angolo *EFD*, vale a dire sarà l'angolo esterno uguale all'interno ed opposto dalla stessa parte; e per conseguenza (n.° 68) le due rette *AB*, *CD* devono essere parallele. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE VIII — *TEOREMA*.

70. *Se due rette vengono segate da una terza, e formano gli angoli interni dalla stessa parte presi insieme uguali a due retti, esse linee saranno parallele* (fig. 11).

Dim. Sieno le rette *AB*, *CD* tagliate dalla terza *GH*, e formino gli angoli interni *BEF*, *EFD* uguali a due retti. Dico che *AB* sarà parallela a *CD*.

Imperocchè, la retta *BE* incontrando la retta *GH* nel punto *E*, fa con questa gli angoli adiacenti *BEG*, *BEF* uguali a due retti (n.° 59): ma per ipotesi gli angoli *BEF*, *EFD* sono pure uguali a due retti, dunque la somma de' primi due angoli è eguale a quella degli altri due, e se si toglie il comune angolo *BEF*, resterà l'angolo *GEB*, uguale all'angolo *EFD*, cioè sarà l'angolo esterno uguale all'interno corrispondente ; e però le due rette *AB* , *CD* devono essere parallele. Il che bisognava dimostrare.

71. *Corollario*. I. Due rette *GK*, *CD* (fig. 12) perpendicolari ad una terza *OF* sono parallele fra loro; dappoichè in tal caso la somma degli angoli interni da una stessa parte è uguale a due retti.

72. *Corollario* II. Da un punto *A* (fig. 13) situato fuori di una retta *MN* non si può abbassare sopra questa retta che una sola perpendicolare *AP*. Perocchè, se si potesse abbassare un'altra perpendicolare *AD*, la somma degli angoli interni *ADP*, *APD* sarebbe uguale a due retti; e per conseguenza le due rette *AP*, *AD* sarebbero parallele; ed allora non potrebbe esistere il punto *A* comune alle due rette medesime.

PROPOSIZIONE IX — *TEOREMA*.

73. *Se due rette vengono segate da una terza in modo che la somma degli angoli interni da una medesima parte sia minore di due retti, esse linee prolungate andranno ad incontrarsi* (fig. 14).

Dim. Siano due rette *AL*, *DC* segate da una terza *AN* in modo che la somma degli angoli interni *LAC*, *ACD* sia uguale a due retti, e quindi l' angolo esterno *DCE* eguale all' interno ed opposto dalla stessa parte *LAC* (n° 70), è manifesto che se si conduca pel punto *A*, dentro lo spazio *LACD*, una qualunque retta *AB*, la somma degli angoli interni *BAC*, *ACD* sarà minore di due retti. Ciò premesso, dico che se le rette *AB*, *CD* si prolunghino , andranno ad incontrarsi.

Infatti, per quanto piccolo possa essere l' angolo *LAB*, è eviden-

te che aggiunto a se stesso un numero di volte illimitato, lo spazio indefinito contenuto fra i lati dell' angolo così moltiplicato arriverà non solo a coprire, ma anche a sorpassare lo spazio indefinito compreso fra i lati dell' angolo *LAN*. Supponiamo dunque, per fissare le idee, che l' angolo *LAB* preso tre volte sia giunto a formare un angolo *LAO* maggiore dell' angolo *LAN*: e supponiamo ancora che lo spazio indefinito *LACD* scorrendo lungo la retta *AN* abbia formato altre due simili strisce *DCEF*, *FEGH*; il che può bene ammettersi, perchè essendo l' angolo esterno *DCE* eguale all' interno ed opposto *LAC*, la retta *LA* nel suo movimento verso *N* dovrà coincidere con la primitiva posizione della retta *CD*, in guisa che la striscia *LACD*, quando il punto *A* sarà giunto in *C*, prenderà la posizione *DCEF*, e così di seguito.

Risulta da queste supposizioni, che lo spazio indefinito *LAB* è una terza parte dello spazio *LAO*, e che la striscia *LACD* è minore della terza parte dello spazio indefinito *LAN*, poichè ripetuta tre volte non è giunta ad esaurire lo spazio medesimo, essendovi il resto *HGN*; ed è chiaro anzi che per essere la retta *AN* indefinita, moltiplicando come si voglia la striscia *LACD*, non si giungerebbe mai ad uguagliare non che a sorpassare lo spazio *LAN*. Or se la striscia *LACD* è minore della terza parte dello spazio *LAN* sarà con più ragione minore della terza parte dello spazio *LAO*, che è più grande di *LAN*; e quindi la striscia *LACD* sarà minore dello spazio *LAB*, il quale si è veduto essere terza parte di *LAO*.

Ciò posto, è chiaro che lo spazio *LAB* non potrebbe essere maggiore della striscia *LACD*, se la retta *AB* prolungata all' infinito non incontrasse mai la retta *CD*, perchè in tal caso la retta *AB* rimarrebbe sempre compresa fra le rette *AL*, *CD*, e lo spazio *LAB* sarebbe una parte della striscia *LACD*. La retta *AB* dovrà dunque incontrare la *CD*. Il che bisognava dimostrare.

74. *Scolio*. Si può dare a questa proposizione una enunciazione più generale. Perocchè se *AB'*, e *CD'* (fig. 14) sono i prolungamenti di *AB*, e *CD*, essendo gli angoli *CAB*, *CAB'* eguali a due retti (n°59), come pure gli angoli *ACD*, *ACD'*, la somma de' quattro angoli *CAB*, *CAB'*, *ACD*, *ACD'* sarà uguale a quattro retti, e tolti gli angoli *BAC*, *ACD* minori di due retti, rimarranno gli altri due *CAB'*, *ACD'* maggiori di due retti. Dunque le rette *BB'*, *DD'* fanno con la secante *AC*, da una parte gli angoli interni minori di due retti, e dall' altra maggiori; e però potrà dirsi in generale che:

Se due rette sono segate da una terza in modo che la somma degli angoli interni da una medesima parte sia minore o maggiore di due retti, esse linee prolungate dovranno incontrarsi dalla parte verso la quale gli angoli interni sono minori di due retti (*).

(*) È questo il famoso postulato V di Euclide.

PROPOSIZIONE X — *TEOREMA*.

75. *Se due rette sono parallele e vengono segate da una terza,*
1.° *gli angoli interni dalla stessa parte presi insieme.*
sono uguali a due retti.
2.° *gli angoli alterni sono uguali fra loro.*
3.° *l' angolo esterno è uguale all' interno ed opposto dalla stessa parte* (fig. 11).

Dim. Siano le due rette parallele *AB*,*CD* segate dalla terza *GH*, dico in primo luogo che gli angoli interni *BEF*, *EFD* presi insieme sono uguali a due retti. Imperciocchè,se la somma di questi angoli non fosse eguale a due retti,dovrebbe essere minore o maggiore ; il che è impossibile, perchè le rette *AB*, *CD* andrebbero ad incontrarsi verso *B*, *D*, o verso *A*, *C* (n° 74), contro l' ipotesi.

In secondo luogo, dico che gli angoli alterni sono eguali fra loro. Infatti essendosi ora dimostrato che la somma degli angoli interni *BEF*, *EFD* è uguale a due retti, e tale essendo ancora la somma degli angoli *BEF*, *AEF* (n° 59), se dalle due somme eguali si tolga l' angolo comune *BEF* , rimarrà l' angolo *EFD* uguale all' angolo *AEF* ; cioè gli angoli alterni saranno eguali.

Finalmente anche l' angolo esterno *GEB* eguaglierà l' interno ed opposto dalla stessa parte *EFD* ; perchè l' angolo *GEB* è uguale al suo verticale *AEF*, e questo si è già dimostrato eguale all' alterno *EFD*. Il che bisognava dimostrare.

76. *Corollario* I. *Se due rette* CD, GK (fig. 12) *sono parallele, ogni retta* FO *perpendicolare ad una delle parallele, dev' essere perpendicolare ancora all'altra.* Perocchè essendo parallele,la somma degli angoli interni *KOF*, *OFD* è eguale a due retti : ma uno di questi angoli è retto per ipotesi, dunque l' altro sarà pure retto.

77. *Corollario* II. *Per un punto dato* O (fig. 12) *non si può condurre ad una retta data* CD *che una sola parallela* GK. Infatti , qualunque altra retta *LH* non potrà mai essere parallela a *CD*, perchè se si tiri la secante *OF*, la somma degli angoli interni *HOF*, *OFD* risulta minore di due retti ; e però (n° 74) le due rette *LH*, *CD* prolungate s' incontreranno.

78. *Corollario* III. *Due rette* DE, FG (fig. 3) *parallele ad una terza* AC, *sono parallele fra loro* .

Perocchè se le due rette accennate potessero incontrarsi,dal punto del loro incontro si potrebbero condurre due rette parallele ad una medesima retta; il che non può sussistere (*).

(*) Immaginiamo (fig. 11) che la secante *GH* giri intorno al punto *F* verso *D*. In virtù della proposizione (n.° 75) gli angoli alterni *AEF*,*EFD* saranno sempre uguali fra loro. Quindi a misura che la secante si avvicinerà alla retta *CD*, l' angolo *AEF* andrà continuamente diminuendo della stessa quantità precisa, di cui diminuisce l' angolo *EFD* ; per conseguenza l' angolo *AEF* si avvicina continuamente a zero, ma non vi arriverà se non

PROPOSIONE XI — *TEOREMA.*

79. *Due angoli che hanno i lati rispettivamente paralleli e diretti dalla stessa parte, sono uguali* (fig. 15).

Dim. Sieno i due angoli *DEF*, *BAC*, nei quali sia il lato *DE* parallelo al lato *BA*, ed *EF* parallelo ad *AC*. Dico che l' angolo *DEF* = *BAC*.

Si prolunghi il lato *DE* finchè incontri il lato *AC* nel punto *O*; un siffatto incontro dovrà aver luogo, poichè pel punto *E* non si può condurre ad *AC* che una sola parallela *EF* (n° 77). Quindi rispetto alle parallele *EF*, *AC* che vengono segate dalla terza *DO*, sarà l'angolo esterno *DEF* uguale all'interno ed opposto *EOC* (n.° 75). Parimente rispetto alle parallele *DO*, e *BA*, che vengono segate dalla terza *AC*, l'angolo esterno *EOC* è uguale all'interno ed opposto *BAC*. Dunque l'angolo *DEF* è uguale all'angolo *BAC*. Il che bisognava dimostrare.

CAPITOLO III.

DEI TRIANGOLI.

80. Con due rette comunque situate non si può mai terminare un piano da per ogni dove, ma vi bisognano almeno tre rette.

81. *Definizione* I. Un piano terminato da tre rette dicesi *triangolo* : le tre rette medesime si chiamano *lati* del triangolo. Si dicono poi *angoli del triangolo* gli angoli formati dai lati.

82. *Definizione*. II. Un triangolo si dice *equilatero*, quando ha i tre lati uguali ; *isoscele*, se ha due soli lati uguali ; *scaleno*, quando i tre lati sono disuguali.

PROPOSIZIONE XII — *TEOREMA.*

83. *In ogni triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza* (fig. 16).

Dim. Sia il triangolo *ABC*. Dico in primo luogo che un lato qua-

---

quando la secante *GH* nel suo rivolgimento intorno al punto *F* sarà giunta a coincidere colla retta *CD*.

Da ciò si deduce evidentemente che due rette situate in un medesimo piano fanno tra loro un angolo zero in due soli casi, cioè o quando l'una coincide coll' altra, o quando l' una è parallela all' altra. In ogni altro caso le due rette formeranno angolo, avendo un solo punto comune. Or in relazione con le parallele le rette che fanno angolo hanno ricevuto denominazioni particolari. Così, se si considerano nella parte in cui si accostano al punto comune, si chiamano *convergenti* ; se poi si considerano nella parte in cui se ne scostano, si dicono *divergenti*. È facile vedere che le rette convergenti da una parte non possono divenire divergenti dalla stessa parte senza prima divenire parallele.

lunque *AB* è minore della somma degli altri due *AC*, *BC*.

Infatti, essendo la linea retta la più corta di tutte le linee che si possono condurre da un punto ad un' altro (n° 12), ne segue che la linea retta *AB* dev' essere minore della linea spezzata *ACB*, ch' è composta delle due rette *AC*, *CB*. Supponendo ora che *AC* sia maggiore di *CB*, dico in secondo luogo che *AB* è maggiore della differenza di queste due rette. Perocchè essendo per le cose precedenti la somma delle due rette *AB*, *CB* maggiore di *AC*, se si tolga di comune *CB*, resterà *AB* maggiore di *AC*—*CB*. Dunque in ogni triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XIII — *TEOREMA*.

84. *Se dentro un triangolo* ABC *si prenda un punto* D, *e si conducano le rette* DB, DC *alle estremità di un lato* BC, *la somma di queste rette sarà minore di quella degli altri due lati* AB, AC (fig. 16.)

Dim. Si prolunghi la retta *BD* finchè incontri il lato *AC* nel punto *E*.

Nel triangolo *BAE* il lato *BE* è minore della somma degli altri due *AB*, *AE* (n.° 83); e però se si aggiunge di comune *EC*, sarà la somma delle rette B*E*, *EC* minore di quella delle due *AB*, *AC*. Parimente nel triangolo *DEC* il lato *DC* è minore della somma dei lati *DE*, *EC*; e per conseguenza aggiungendo di comune *BD*, sarà la somma delle rette *BD*, *DC* minore di quella delle due *BE*, *EC*, e con più ragione di quella delle due *AB*, *AC*, che superava la somma delle *BE*, *EC*. Il che bisognava dimostrare.

Caratteri dell' uguaglianza de' triangoli.

85. I caratteri dell'uguaglianza dei triangoli equivalgono alle condizioni che determinano i triangoli medesimi. Ciò sarà messo in chiaro dalle proposizioni qui appresso.

PROPOSIZIONE XIV — *TEOREMA*.

86. *Due triangoli sono uguali, quando hanno due lati uguali a due lati ciascuno a ciascuno, e l' angolo compreso dai primi uguale all' angolo compreso dai secondi* (fig. 17).

Dim. Nei triangoli *ABC*, *EDF* sia il lato *AB*=*ED*, il lato *AC*=*EF*, e l'angolo *A*=*E*; dico che i due triangoli sono uguali.

Si soprapponga il triangolo *ABC* al triangolo *EDF* in modo che il punto *A* cada sul punto *E*, ed il lato *AB* sul lato *ED*. E poichè l' angolo *A*=*E*, ancora il lato *AC* caderà sul lato *EF*. Ma per ipotesi i lati *AB*, *AC* sono uguali ai lati *ED*, *EF*, dunque il punto *B*

dovrà coincidere col punto D, ed il punto C col punto F. Quindi il terzo lato BC coinciderà col terzo lato DF, altrimenti fra due punti si potrebbero condurre due linee rette; il che è assurdo (n° 39). Or le grandezze che, soprapposte l' una all' altra, coincidono in tutta la loro estensione, sono uguali fra loro (n° 39); dunque il triangolo ABC è uguale al triangolo EDF. Il che bisognava dimostrare.

87. *Corollario*. S' inferisce da questo teorema che un triangolo è determinato da due lati e l' angolo compreso da questi lati, vale a dire che quando sono dati due lati e l' angolo compreso, il triangolo non sarà suscettivo che di una sola forma, e di una sola grandezza; poichè i triangoli che si possono fare con gli stessi due lati, e con lo stesso angolo compreso sono tutti identici.

PROPOSIZIONE XV. — *TEOREMA*.

88. *Due triangoli sono uguali, allorchè hanno due angoli uguali ciascuno a ciascuno, ed un lato uguale ad un lato, o che sia adiacente agli angoli uguali, o che sia opposto ad uno di questi medesimi angoli* (fig. 17).

Dim. I. *Caso*. Ne' triangoli ABC, EDF sia il lato $BC=DF$, l'angolo $B=D$, e l'angolo $C=F$: dico che questi due triangoli sono uguali.

Perocchè, soprapponendo il triangolo ABC al triangolo EDF in modo che il lato BC coincida col suo eguale DF, l'angolo B dovrà coincidere coll angolo D, e la retta BA con la retta DE, onde il punto A caderà in un punto della retta DE: similmente l'angolo C coinciderà coll' angolo F, ed il punto A dovrà trovarsi in un punto della retta FE. Quindi il punto A si troverà a un tempo sulla retta DE, e sulla retta FE; ma due linee rette non si possono tagliare che in solo punto (n. 40), dunque il punto A dovrà coincidere col punto E, incontro delle rette DE, FE, e però il triangolo ABC combacerà col triangolo EDF, e gli sarà eguale.

II. *Caso*. Supponiamo ora (fig. 18) che sia l'angolo $B=D$, l'angolo $C=F$, ed il lato $AB=ED$: dico che sarà il triangolo ABC uguale al triangolo EDF; il che si riduce a dimostrare la eguaglianza dei due angoli A, ed E, ricadendo allora la dimostrazione in quella del caso precedente.

Or se questi due angoli non sono eguali, sia A maggiore di E, e si soprapponga il triangolo EDF al triangolo ABC in guisa che il lato ED coincida col suo eguale AB. Essendo per ipotesi l'angolo A maggiore dell'angolo E, il lato EF caderà dentro il triangolo ABC; e però il triangolo EDF sarà rappresentato dal triangolo ABF. Quindi l'angolo BFA sarà uguale all'angolo C; ma ciò è impossibile, perchè essendo l' angolo esterno uguale all'interno ed opposto dalla stessa parte le rette AF, AC sarebbero parallele (n° 68), ed allora non esisterebbe più il punto A, contro la supposizione: dunque non può essere l'angolo A maggiore dell'angolo E. Nello

stesso modo si dimostrerà che non può essere minore; e però deve essere l'angolo $A=E$, e quindi il triangolo ABC sarà uguale al triangolo EDF. Il che bisognava dimostrare.

89. *Corollario*. Segue dalla dimostrazione precedente che un triangolo è determinato, allorche sono dati due de'suoi angoli, ed un lato qualunque; vale a dire non si può formare con siffatti dati che un solo triangolo, perchè se si potesse costruire un altro triangolo, questo sarebbe uguale al primo.

PROPOSIZIONE XVI — *TEOREMA*.

90. *Se due lati d'un triangolo sono uguali rispettivamente a due lati d'un altro triangolo, e l'angolo compreso dai primi è maggiore dell'angolo compreso dagli altri due, sarà il terzo lato del primo triangolo maggiore del terzo lato del secondo* (fig. 19).

Dim. Ne' triangoli ABC, EDF sia il lato $AB=ED$, il lato $BC=DF$, e l'angolo ABC maggiore dell'angolo EDF. Dico che il terzo lato AC del primo triangolo sarà maggiore del terzo lato EF del secondo.

Si soprapponga il triangolo EDF al triangolo ABC, in guisa che il lato DF coincida col suo uguale BC. È manifesto che il punto E del triangolo DEF potrà, secondo le diverse forme del triangolo ABC, cadere o dentro il triangolo ABC in un punto O, o sul lato AC in un punto G, o finalmente fuori dello stesso triangolo ABC in un punto L.

Nel primo caso, la somma de' due lati OB, OC sarà minore di quella de' lati AB, AC (n° 84); e però togliendo da una parte AB, e dall'altra la sua uguale OB, poichè OB rappresenta ED, che si è supposto uguale ad AB, resterà OC, ovvero EF, minore di AC.

Nel secondo caso, la retta GC, ovvero EF, sarà evidentemente minore di AC.

Finalmente nel terzo caso, essendo nel triangolo GCL il lato LC minore della somma degli altri due lati GC, GL (n° 83), e nel triangolo GAB il lato AB minore della somma dei lati AG, GB, ne risulterà che la somma de' lati LC, ed AB sarà minore di quella delle quattro rette GC, GL, GA, GB, ossia delle due LB, ed AC. Perlocchè togliendo da una parte AB, e dall'altra la sua uguale LB, che rappresenta $ED=AB$, resterà LC, ovvero EF, minore di AC. Dunque in tutti i casi EF è minore di AC. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XVII — *TEOREMA*.

91. *Se due lati d'un triangolo sono rispettivamente uguali a due lati d'un altro triangolo, ed il terzo lato del primo è maggiore del terzo lato del secondo, sarà l'angolo compreso dai due primi*

Dim. Ne'triangoli *ABC*, *EDF* sia il lato *AB* = *ED*, il lato *BC* = *DF*, ed il lato *AC* del primo triangolo maggiore del lato *EF* del secondo. Dico che sarà l' angolo *ABC* maggiore dell' angolo *EDF*.

Perocchè, se l'angolo *ABC* non è maggiore dell'angolo *EDF*, sarà o uguale, o minore. Nel primo caso il lato *AC* sarebbe uguale al lato *EF*, in virtù della uguaglianza dei due triangoli *ABC*, *EDF* (n° 86) : nel secondo, il lato *AC* sarebbe minore del lato *EF*, in virtù della proposizione precedente. Ma ciò è contro la supposizione in ambedue i casi, dunque l' angolo *ABC* dev' essere maggiore dell' angolo *EDF*. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XVIII — *TEOREMA*.

92. *Due triangoli sono uguali, allorchè i tre lati del primo sono rispettivamente uguali ai tre lati del secondo* (fig. 17).

Dim. Ne'due triangoli *ABC*, *EDF* sia il lato *AB* = *DE*, *AC* = *EF*, *BC* = *DF*. Dico che sarà l' angolo *A* = *E*, *B* = *D*, *C* = *F*.

Infatti, se l'angolo *A* fosse maggiore dell'angolo *E*, sarebbe il lato opposto *BC* maggiore del lato *DF* (n° 90), contro la supposizione; e se l' angolo *A* fosse minore dell' angolo *E*, il lato *BC* sarebbe minore del lato *DF*, anche contro la supposizione; dunque l'angolo *A* dev'essere uguale all' angolo *E*. Nello stesso modo si dimostra che l' angolo *B*=*D*, e l'angolo *C*=*F* ; e però (n° 86) sarà il triangolo *ABC* uguale al triangolo *EDF*. Il che bisognava dimostrare.

93. *Corollario*. Un triangolo è determinato dai suoi tre lati.

94. *Scolio*. Merita di essere osservato che ne' triangoli uguali, gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali, e reciprocamente i lati uguali sono opposti agli angoli uguali.

CAPITOLO IV.

RISOLUZIONE DI ALCUNI PROBLEMI.

95. Le proposizioni teoretiche fin qui dimostrate, unite alla definizione del cerchio, possono servire a risolvere diversi problemi utili per se stessi, e proprii ad avvezzare i principianti all applicazione delle teoriche apprese. Ma oltre a ciò si può fare ancora un altro uso della soluzione de' problemi, ed è quello di dimostrare la possibilità di certe cose, dando metodi certi per costruirle (*). E principalmente sotto quest' ultimo punto di vista che riportiamo qui appresso la soluzione di alcuni problemi; dappoichè sono necessarii nelle dimostrazioni dei teoremi, che verranno in seguito.

(*) La soluzione di un problema contiene la *costruzione*, cioè l' operazione geometrica, che determina ciò che si va cercando, e la *dimostrazione* di essa costruzione. Quindi il problema si riduce sempre a costruire qualche cosa, vale a dire un punto, una linea ecc., mentre il teorema non costruisce alcuna cosa, ma dimostra una verità.

PROPOSIZIONE XIX — *PROBLEMA.*

96. *Da un punto di una retta data innalzare su questa retta una perpendicolare* (fig. 20).

Soluzione. Sia C un punto di una retta MN, da cui debba innalzarsi su questa retta la perpendicolare.

Si faccia centro in C, e con un raggio ad arbitrio si descrivano due archi di cerchio, che tagliano la retta data MN nei punti A, e B: poi si prendano questi punti come centri, e con un raggio uguale ad AB si descrivano due archi di cerchio, i quali evidentemente dovranno incontrarsi; poichè se si descrivano le circonferenze intere, quella descritta col centro A e col raggio AB dovrà passare pel punto B, ed estendersi verso M, e quella descritta col centro B e collo stesso raggio dovrà passare pel punto A, ed estendersi verso N. Ciò premesso, dal punto D del loro incontro si conduca la retta DC. Dico che questa sarà la perpendicolare richiesta.

Infatti, si tirino le rette DA, DB. Esssendo per costruzione $AC=CB$, ed $AD=BD$ come raggi di cerchi uguali, e DC comune ai due triangoli ACD, BCD, questi saranno uguali fra loro (n° 92); e però sarà l'angolo DCA uguale all'angolo DCB (n°. 94), ovvero sarà DC perpendicolare a MN (n°. 54). Il che bisognava fare.

97. *Scolio.* È manifesto che facendo uso della costruzione precedente si potrebbe descrivere sopra una retta data AB un triangolo equilatero ABD; poichè i tre lati AB, AD, BD sono uguali fra loro.

PROPOSIZIONE XX — *PROBLEMA.*

98. *Da un punto situato fuori di una retta indefinita abbassare su questa retta la perpendicolare.* (fig. 21).

Sol. Sia A il punto da cui debba abbassarsi la perpendicolare sulla retta indefinita BD.

Si faccia centro in A, e con un raggio sufficientemente grande si descriva un arco che taglia la retta data ne'punti B, e D; indi si prendano questi punti per centri, e con un raggio uguale a BD si descrivano al di sotto di BD due archi, che dovranno incontrarsi per le ragioni addotte nella proposizione precedente. Ciò fatto, si congiunga il punto E d'incontro de'due archi col punto dato A. Dico che la retta AE sarà la perpendicolare richiesta.

Perocchè, se si tirino le rette AB, AD, BE, DE, ne risulteranno i due triangoli ABE, ADE, i quali saranno uguali perchè hanno i tre lati respettivamente uguali; e però sarà l'angolo BAC uguale all'angolo DAC. Or essendo ne'due triangoli ABC, ADC il lato $AB=AD$, il lato AC comune, e l'angolo $BAC=DAC$, essi triangoli saranno uguali; e per conseguenza sarà l'angolo $ACB=ACD$, ovvero (n°. 54) sarà AE perpendicolare a BD. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE XXI — *PROBLEMA.*

99. *Dividere una retta terminata in due parti uguali* (fig. 22).

Sol. Sia da dividersi in due parti uguali la retta *AB*. Dai punti *A*, e *B* come centri, e con un raggio *AB* si descrivano due archi che si tagliano in *C*, e due altri archi che si tagliano in *D*; indi si conduca la retta *CD*. Dico che questa retta dividerà la retta data in due parti uguali nel punto *E*.

Perocchè, se si tirino le rette *CA*, *CB*, *AD*, *BD* si dimostrerà come nella proposizione precedente che il triangolo *CAE* è uguale al triangolo *CBE*; e per conseguenza (n°. 94) sarà $AE=EB$. Il che bisognava fare.

100. *Corollario.* Si deduce da questa proposizione che si può dividere una retta data *AB* in 4 parti uguali; poichè basta dividere ciascuna sua metà *AE*, ed *EB* in due parti uguali. Si concepisce ora come potrebbe dividersi *AB* in 8, in 16, in 32, ecc., parti uguali.

PROPOSIZIONE XXII — *PROBLEMA.*

101. *Dividere un angolo in due parti uguali* (fig. 21).

Sol. Sia da dividersi l' angolo *BAD* in due parti uguali. Si faccia centro nel vertice *A*, e con un raggio ad arbitrio si descriva un arco che tagli i lati dell' angolo nei punti *B*, e *D*, indi si tiri la corda *BD*, e presi per centri i punti *B*, e *D* si descrivano col raggio *BD* due archi che si tagliano nel punto *E*. Finalmente si conduca la retta *AE*; questa dividerà l' angolo dato in due parti uguali.

Infatti, se si tirino le rette *AB*, *AD* *BE*, *DE* si dimostrerà come nelle due proposizioni precedenti che l'angolo $BAC = DAC$. Il che bisognava fare.

102. *Corollario.* Apparisce da questa proposizione che un angolo dato si può dividere in 4, in 16, in 32, ecc. parti uguali.

PROPOSIZIONE XXIII — *TEOREMA.*

103. *In un dato punto di una linea retta costruire un angolo uguale ad un angolo dato.* (fig. 23).

Sol. Sia *A* il punto dato nella retta *AC*, e sia *D* l' angolo dato.

Si faccia centro in *D*, e con un raggio ad arbitrio si descriva un arco che tagli i lati dell' angolo ne' punti *E*, ed *F*, e si conduca la corda *EF*. Si faccia poi centro in *A* e con un raggio $AC = DE$ si descriva un arco indefinito; indi fatto centro in *C*, e con un raggio $CB = EF$ si descriva un altro arco che tagli il primo nel punto *B*, e si tirino le rette *AB*, *CB*, l' angolo *BAC* sarà uguale all' angolo dato *D*.

Infatti, i due triangoli *ABC*, *DEF* sono uguali, perchè hanno i

tre lati rispettivamente uguali, onde (n° 94) sara l'angolo $A=D$. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE XXIV — *PROBLEMA*.

104. *Per un punto dato tirare una linea retta parallela ad una retta data.* (fig. 24).

Sol. Sia A il punto dato, e CD la retta data. Si prenda un punto F sopra CD, e si conduca AF; poi si faccia al punto A della retta AF l angolo BAF uguale all' angolo CFA, la retta AB sarà la parallela richiesta; dappoichè per la costruzione sono uguali gli angoli alterni BAF, AFC. Il che bisognava fare.

CAPITOLO V.

PROPRIETA' DE' TRIANGOLI.

105. Le relazioni, ch' esistono fra i lati, o fra gli angoli di un triangolo, costituiscono le proprietà di esso. Eccone le principali.

PROPOSIZIONE XXV — *TEOREMA*.

106. *La somma degli angoli di qualunque triangolo è uguale a due angoli retti.* (fig. 25).

Dim. Sia il triangolo ABC, dico che la somma de' tre angoli è uguale a due retti.

Si prolunghi il lato BC in D, e si tiri CE parallela ad AB. Gli angoli ACE, BAC sono uguali come alterni rispetto alla secante AC; rispetto poi alla secante BD, l'angolo esterno ECD è uguale all'interno opposto dalla stessa parte ABC; dunque sarà tutto l'angolo ACD, cioè la somma de' due ACE, ECD, uguale ai due angoli A e B presi insieme: si aggiunga di comune l' angolo ACB, e sarà la somma degli angoli ACD, ACB uguale a quella de' tre angoli del triangolo; ma la prima somma è uguale a due retti (n° 59), dunque lo sarà ancora la seconda. Il che bisognava dimostrare.

107. *Corollario* I. *Se in un triangolo si prolunga un lato, l'angolo esterno è uguale alla somma de' due interni ed opposti; e per conseguenza è maggiore di ciascuno di essi angoli.*

II. *Se due angoli di un triangolo sono uguali a due angoli di un altro, ancora il terzo angolo di questo sarà eguale al terzo di quello.*

Infatti, se dalla somma costante dei tre angoli nell'uno e nell'altro triangolo, si tolgono gli angoli uguali, i residui dovranno essere eguali.

III. *In un triangolo non vi può essere che un solo angolo retto, e con più ragione un solo angolo ottuso.*

108. *Definizione* I. Triangolo *rettangolo* dicesi quello che ha un angolo retto. Il lato opposto all'angolo retto chiamasi *ipotenusa*, gli altri due lati si dicono *cateti*.

Dal che si deduce che nel triangolo rettangolo la somma dei due angoli acuti è eguale ad un retto; e però (n° 61) l'uno è complemento dell'altro.

109. *Definizione* II. Triangolo *ottusangolo* si dice quello che ha un angolo ottuso. Si chiama poi *acutangolo* quello che ha i tre angoli acuti.

La denominazione di triangolo *obliquangolo* comprende il triangolo ottusangolo, e l'acutangolo.

PROPOSIZIONE XXVI — *TEOREMA*.

110. *In un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali* (fig. 26).

Dim. Nel triangolo isoscele AFB sia il lato $FA = FB$; dico che sarà l'angolo $A = B$.

Si divida l'angolo AFB in due parti uguali. I due triangoli AFE, FEB sono uguali, perchè hanno l'angolo AFE uguale all'angolo EFB per costruzione, e sono uguali i lati, che comprendono i detti angoli, dunque sarà il triangolo FAE uguale al triangolo FBE (n° 86); ma ne' triangoli uguali gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali (n° 94); per conseguenza sarà l'angolo $A = B$. Il che bisognava dimostrare.

111. *Corollario*. Dall'uguaglianza de' medesimi triangoli si deduce che il lato $AE = EB$, e che l'angolo $AEF = FEB$, onde questi due angoli sono retti. Quindi « in un triangolo isoscele, la li» nea FE, che divide l'*angolo al vertice* AFB in due parti ugua» li, è perpendicolare alla *base* AB, e passa pel suo punto di mez» zo E.

PROPOSIZIONE XXVII — *TEOREMA*.

112. *Se in un triangolo due angoli sono uguali, i lati opposti saranno uguali* (fig. 26).

Dim. Nel triangolo AFB sia l'angolo $A = B$; dico che sarà il lato $AF = FB$.

Dal punto F si conduca la perpendicolare FE sopra AB.

Ne' triangoli AFE, FEB il lato FE è comune, l'angolo $A = B$ per ipotesi, l'angolo $FEA = FEB$ come retti, dunque i due triangoli saranno uguali (n° 88): ma nei triangoli uguali i lati uguali sono opposti agli angoli uguali (n° 94); perciò sarà $FA = FB$. Il che bisognava dimostrare.

113. *Corollario I*. Da questo teorema si deduce che la perpendicolare abbassata dal vertice di un triangolo isoscele sopra la base,

divide l'angolo al vertice in due parti uguali, e passa pel punto di mezzo della base medesima.

114. *Corollario II.* Risulta ancora da questi due ultimi teoremi che un triangolo equilatero è nel tempo stesso *equiangolo*, e reciprocamente un triangolo equiangolo è anche equilatero. Ed il triangolo equilatero avendo i tre angoli eguali fra loro, ciascuno di essi è terza parte di due retti, ossia equivale a due terzi di un angolo retto (n° 106). Quindi il triangolo equilatero è sempre acutangolo, mentre il triangolo isoscele può essere acutangolo, rettangolo, ed ottusangolo, secondo che l'angolo compreso fra i lati uguali è acuto, retto, o ottuso; poichè gli angoli alla base sono sempre acuti.

PROPOSIZIONE XXVIII — *TEOREMA.*

115. *Di due angoli di un triangolo il maggiore è quello, che trovasi opposto ad un lato maggiore.* (fig. 27.)

Dim. Nel triangolo *ABC* sia il lato *CB* maggiore del lato *CA*; dico che sarà l'angolo *CAB* maggiore dell'angolo *CBA*.

Sul lato *CB* si prenda una parte *CD* uguale al lato *CA*; e si tiri la retta *DA*. Essendo isoscele il triangolo *CAD*, gli angoli alla base *AD* sono uguali, e però sarà l'angolo *CAD* uguale all'angolo *CDA* (n° 110). Ma l'angolo *CDA* esterno al triangolo *DBA* è maggiore dell'angolo interno ed opposto *ABD* (n° 107), dunque sarà ancora l'angolo *CAD* maggiore dell'angolo *ABD*, e con più forte ragione lo sarà l'angolo *CAB*. Dunque l'angolo *CAB* è maggiore dell'angolo *CBA* Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XXIX — *TEOREMA.*

116. *Reciprocamente di due lati di un triangolo il maggiore è quello, che trovasi opposto ad un angolo maggiore* (fig. 27).

Dim. Nel triangolo *ABC* sia l'angolo *CAB* maggiore dell'angolo *CBA*: dico che sarà il lato *CB* maggiore del lato *CA*.

Imperocchè, se il lato *CB* non è maggiore del lato *CA*, sarà o uguale o minore: nel primo caso il triangolo sarebbe isoscele, e gli angoli *A*, *B* opposti ai lati uguali sarebbero uguali contro l'ipotesi, e nel secondo caso, l'angolo *CAB* opposto al lato minore *CB* dovrebbe esser minore di *CBA* (n° 115), anche contro l'ipotesi. Dunque il lato *CB* deve esser maggiore del lato *CA*. Il che bisognava dimostrare.

117. *Scolio.* Risulta da questi due ultimi teoremi che il triangolo scaleno può, come l'isoscele, essere rettangolo, ottusangolo, ed acutangolo.

PROPOSIZIONE XXX — *TEOREMA.*

118. *Se pel punto di mezzo* P *di una retta terminata* AB *s'innalzi su questa retta una perpendicolare indefinita* PS.

1.° *Ogni punto* S *di essa perpendicolare sarà equidistante dalle due estremità della retta* AB.

2.° *Ogni punto* M *situato fuori della perpendicolare sarà disugualmente distante dalle stesse estremità* (fig. 28).

Dim. Infatti, si congiunga il punto *S* con i due punti *A*, e *B*. Nei triangoli *SAP*, *SBP* il lato $AP = PB$ per supposizione, il lato *SP* è comune, e l'angolo $APS = BPS$ perchè retti. Quindi (n° 86) il triangolo *SAP* è uguale al triangolo *SBP* ; e per conseguenza sarà il lato $SA = SB$, ovvero sarà il punto *S* equidistante dai punti *A*, e *B*.

In secondo luogo, se si tirino le rette *MA*, *MP*, *MB*, ne risulteranno i triangoli *MAP*, *MBP*, ne' quali il lato *MP* è comune, il lato $AP = PB$, e l'angolo *APM* è maggiore dell'angolo *BPM*, perchè l'uno è ottuso, e l'altro acuto. Epperò sarà il terzo lato *MA* maggiore del terzo lato *MB* (n° 90), vale a dire sarà il punto *M* disugualmente distante dai punti *A*, e *B*. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XXXI — *TEOREMA.*

119. *Se da un punto* A *situato fuori di una retta* CD *si conducano su questa retta la perpendicolare* AP, *e differenti oblique* AB, AC, AD;

1.° *La perpendicolare sara più corta di ogni obliqua.*

2.° *Le oblique* AB, AC, *che si discostano egualmente dal piede* P *della perpendicolare saranno uguali.*

3.° *Di due oblique qualunque* AD, *ed* AB *quella che più si allontana dal piede della perpendicolare sarà la più lunga.* (fig. 29).

Dim. Infatti, 1° nel triangolo *ABP* l'angolo *APB* è retto; perciò sarà acuto l'angolo *ABP* (n° 107); ed il lato *AB* opposto all'angolo maggiore *APB* sarà maggiore del lato *AP* opposto all'angolo minore *ABP* (n° 116). vale a dire la perpendicolare *AP* sarà più corta della obliqua *AB*, e nello stesso modo si dimostrerà che sarà più corta di qualunque altra obliqua.

2° I due triangoli *ABP*, *ACP* sono uguali, poichè il lato $BP = PC$ per supposizione, il lato *AP* è comune, e l'angolo $APB = APC$ come retti. Quindi sarà l'obliqua $AB = AC$.

3° Nel triangolo *ADB* l'angolo ottuso *ABD* è maggiore dell'acuto *ADB* ; per conseguenza (n° 116) sarà il lato *AD* maggiore del lato *AB*. Il che bisognava dimostrare.

120. *Corollario I* La perpendicolare misura la vera distanza di un punto ad una retta data, perchè è più corta di ogni obliqua condotta da quel punto alla retta medesima.

121. *Corollario II.* Da un medesimo punto non si possono condurre sopra una retta data più di due rette uguali; perocchè se si potessero condurre tre rette uguali, vi sarebbero da una medesima parte della perpendicolare due oblique uguali; il che non può sussistere.

122. *Scolio* I. Si osservi che se le oblique AB, AC si suppongono uguali fra loro, esse dovranno allontanarsi ugualmente dal piede P della perpendicolare AP; dappoichè essendo in tal caso isoscele il triangolo ABC, la perpendicolare AP deve dividere la base BC in due parti uguali nel punto P (n° 111), onde sarà $BP = PC$.

* 123. *Scolio.* II. Merita ancora di essere notato che si possono descrivere tutte le diverse specie di triangoli, facendo convenevolmente variare la distanza del punto A (fig. 29) dalla retta DC. Infatti:

1° Se la distanza accennata è tale che la obbliqua AB, o la sua eguale AC, sia eguale a BC, il triangolo ABC sarà equilatero. Si è poi veduto (n° 97) che ciò accade quando presi per centri i punti B, e C si descrivono collo stesso raggio BC due archi di cerchio, i quali dovranno incontrarsi in un punto A della perpendiolare AP.

2° Se $AP = BP = PC$, il triangolo ABC sarà isoscele rettangolo. Perocchè in tal caso essendo isosceli i triangoli ABP, ACP, ABC, gli angoli ABP, BAP, PAC, ACP sono tutti eguali fra loro (n° 110). Ma i quattro angoli accennati formano i tre angoli del triangolo ABC, ed equivalgono perciò (n° 106) a due retti: dunque l'angolo BAC, che è la somma de due angoli BAP, CAP dev' essere uguale ad un angolo retto. Da ciò si potrà facilmente dedurre che quando AP è minore di BP, il triangolo ABC, è isoscele ottusangolo, e quando AP è maggiore di BP, lo stesso triangolo è isoscele acutangolo.

3° Finalmente se AP è uguale, o maggiore di DC, il triangolo ADC sarà scaleno acutangolo. Perocchè, essendo la obliqua AD maggiore della perpendicolare AP, sarà pure maggiore di DC; e per conseguenza (n° 115) l'angolo DCA sarà maggiore dell'angolo DAC. Ma l'angolo DCA è acuto, dunque sarà ancora acuto l'angolo DAC: e siccome l'angolo ADC è esso pure acuto, così ne consegue che il triangolo CAD dev'essere acutangolo. Or essendo la obliqua AD maggiore della perpendicolare $AP = DC$ per ipotesi, sarà il triangolo CAD scaleno acutangolo.

È facile poi vedere che essendo retto l'angolo BAC, quando $AP = BP$, il triangolo CAD risulta in tal caso scaleno ottusangolo. in quanto al triangolo scaleno rettangolo, esso si avrà allorchè essendo $AP > PC$ si faccia l'angolo $DAP = ACP$; dappoichè in tal caso l'angolo PAC essendo complemento di ACP (n° 108), lo sarà pure del suo eguale DAP, e quindi l angolo DAC sarà retto.

Applicazione delle proprietà precedenti alla risoluzione di alcuni problemi.

PROPOSIZIONE XXXII. — *PROBLEMA.*

124. *Essendo dati due lati di un triangolo, e l'angolo da essi compreso, descrivere il triangolo* (fig. 30).

Soluzione. Si tiri una retta indefinita *DF*, ed al punto *D* si faccia l'angolo *EDF* eguale all'angolo dato; indi sopra le rette *DE*, *DF* si prendano le parti *DG*, *DH* rispettivamente uguali ai lati dati, e si conduca la retta *GH*, il triangolo *DGH* sarà evidentemente il triangolo richiesto. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE XXXIII — *PROBLEMA.*

125. *Essendo dati un lato e due angoli di un triangolo, descrivere il triangolo* (fig. 31).

Soluzione. Possono darsi due casi, o il lato dato è adiacente ai due angoli dati, o è adiacente all'uno, ed opposto all'altro.

I. *Caso.* Si conduca una retta *DE* uguale al lato dato; indi si faccia al punto *D* l'angolo *FDE* uguale ad uno degli angoli dati, ed al punto *E* l'angolo *FED* eguale all'angolo rimanente: le rette *DF*, *EF* incontrandosi daranno il triangolo *DFE*, che sarà il triangolo richiesto.

II. *Caso.* Si tiri una retta *AB* eguale al lato dato; poi si faccia l'angolo *CAB* eguale all'angolo adiacente ad *AB*, e finalmente in un punto qualunque *M* della retta *AC* si costruisca l'angolo *AML* eguale all'altro angolo dato: la retta *CB* parallela alla retta *ML* darà il triangolo cercato, perchè in virtù delle parallele l'angolo *AML* è uguale all'angolo *C*. Il che bisognava fare.

126. *Scolio.* È chiaro che gli angoli dati presi insieme debbono essere minori di due retti; altrimenti il triangolo non potrebbe esistere (n° 106).

PROPOSIZIONE XXXIV — *PROBLEMA.*

127. *Essendo dati i tre lati di un triangolo, descrivere il triangolo* (fig 32).

Soluzione. Si tiri una retta indefinita, su cui si prendano le tre parti *MA*, *AB*, *BN* eguali rispettivamente ai tre lati dati, i quali dovranno esser tali che ciascuno sia minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza (n. 83). Ciò premesso, si faccia centro in *A*, e col raggio *AM* si descriva la circonferenza *MCD*; indi si faccia centro in *B*, e col raggio *BN* si descriva la circonferenza *NCD* che incontra la prima nel punto *C*: finalmente si tirino i raggi *CA*, *CB*, il triangolo *ACB* sarà il triangolo richiesto,

perchè AB è uno de'tre lati dati, $AC = AM$ come raggi di un medesimo cerchio, e $CB = BN$ per la stessa ragione.

Resta ora a dimostrare che le due circonferenze accennate devono incontrarsi necessariamente. Or due casi possono darsi, o il lato AB è maggiore di ciascuno degli altri due, o è minore; poichè il caso in cui fosse uguale a ciascuno de'due lati, o ad un solo di questi medesimi lati, si riduce facilmente ai due primi.

Nel primo caso (fig. 32, n. 1), essendo AM minore di AB, la circonferenza MCD deve incontrare la retta MN in un punto E situato tra i punti A e B. Da un'altra parte essendo BN minore di AB, ma maggiore di BE, che è la differenza degli altri due lati AB, AM, perchè $AE = AM$, la circonferenza NCD dovrà incontrare la retta MN in un punto O posto tra i punti A ed E; e per conseguenza risulta evidente l'incontro delle due circonferenze.

Nel secondo caso (fig. 32, n. 2), essendo AM maggiore di AB, ma minore di $AB+BN$, la circonferenza MCD, deve incontrare la retta MN in un punto E situato tra i punti B e N. Da un'altra parte essendo BN maggiore di AB, ma minore di $AB+AM$, la circonferenza NCD dovrà incontrare la retta MN in un punto O situato tra i due A e M; e per conseguenza anche in questo secondo caso è manifesto l'incontro delle due circonferenze. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE XXXV — *PROBLEMA.*

* 128. *Essendo dati due lati di un triangolo ed un angolo opposto ad uno di essi, descrivere il triangolo* (fig. 33).

Soluzione. Siano dati i due lati A, B, e l'angolo C opposto ad uno di essi: possono darsi due casi.

I. *Caso.* Se l'angolo dato C è retto, o ottuso, ed è opposto al lato B, che si suppone maggiore di A: in tal caso si faccia l'angolo $MDN = C$, si prenda $DE = A$, indi col centro in E. e con un raggio $= B$ si descriva un arco di cerchio, che taglierà la retta GN in due punti F, G situati a parti contrarie rispetto al punto D. Infatti, abbassando dal punto E sopra GN la perpendicolare EO, questa dovrà cadere nell'angolo acuto EDG, e vi saranno due obbliquе uguali EF, EG situate come nella figura, essendosi supposta ED minore di EF, ovvero di B. Da questa costruzione si hanno dunque due triangoli EDF, EDG, ma solo il primo risolve il problema nel senso preciso dell'enunciato, perchè l'angolo EDG del secondo non è l'angolo dato, ma il supplemento di quello.

È poi evidente che nel caso dell'angolo retto, si potrà prendere uno qualunque de'due trangoli EDF, EDG; e che se il lato opposto B fosse minore o uguale ad A, il problema sarebbe impossibile nel caso dell'angolo retto, o dell'angolo ottuso.

II. *Caso.* Se l'angolo dato C è acuto, ed il lato opposto B seguiti ad esser maggiore di A, la costruzione precedente ha sempre luogo; e qui pure si vede che si hanno due triangoli, de'quali un solo soddisfa a tutte le condizioni del problema.

Ma se C è acuto, e B minore di A, in tal caso si faccia (fig. 34) l'angolo $RKQ = C$, si prenda $KI = A$; indi col centro in I, e con un raggio $= B$ si descriva un arco di cerchio, il quale dovrà tagliare la retta KQ in due punti L, e P situati da una medesima parte rispetto al punto K. Infatti, abbassando la perpendicolare IM sopra KQ è manifesto che vi devono essere due oblique uguali tra loro IL, ed IP situate come nella figura, essendosi supposta IK maggiore di IL. Laonde con la costruzione precedente si avranno due triangoli ILK, IPK, i quali soddisferanno ambidue al problema proposto. Il che bisognava fare.

* 129. *Scolio* I. Apparisce dalle cose precedenti che qualunque sia l'angolo C, cioè retto, ottuso, o acuto, il problema proposto non potrà risolversi, se il lato B opposto all'angolo C *fosse minore* della perpendicolare EO (fig. 33) abbassata dalla estremità E del lato adiacente sulla retta indefinita GN, perchè l'arco descritto col raggio B non incontrerebbe quella retta.

* 130. *Scolio* II. È facile vedere che se si volesse stare alla generalità della geometria, e non si volesse considerare il caso particolare del triangolo, il problema precedente dovrebbe esser enunciato nel modo seguente (fig. 33).

Essendo dato un angolo qualunque MDN, *e presa sopra* DM *una parte* DE *uguale ad una retta data, trovare sulla retta indefinita* GN *un punto* F *tale che la congiungente* EF *risulti di data grandezza.*

* 131. *Scolio* III. Merita ancora di esser notato che i quattro problemi precedenti si comprendono nel seguente problema generale.

Costruire un triangolo essendo dati tre de'suoi elementi, che sono i tre lati ed i tre angoli, tra i quali vi sia almeno un lato.

Nella combinazione de' dati necessarii per poter descrivere un triangolo vi dev'essere almeno un lato, perchè se fossero dati solamente i tre angoli A, B, C, il problema sarebbe *indeterminato*, cioè si potrebbero costruire infiniti triangoli differenti. Infatti (fig. 31), se si tiri una retta DE ad arbitrio, e si faccia al punto D l'angolo $FDE = A$, ed al punto E l'angolo $FED = B$, il terzo angolo DFE del triangolo, che ne risulta, sarà eguale al terzo angolo dato C.(n.° 107). Quindi facendo variare la lunghezza della retta DE si avranno infiniti triangoli equiangoli fra loro, ma non eguali; e perciò il problema resta indeterminato.

CAPITOLO VI.

DE' POLIGONI.

132. *Definizione* I. Un piano terminato d'ogni intorno da linee chiamasi *figura piana*.

133. II. Se le linee sono rette, la figura piana si dirà *rettilinea*, o più brevemente *poligono* (fig. 35).

134. III. Se le linee sono curve la figura piana si dirà *curvilinea*. Il cerchio è la sola figura curvilinea che si considera negli elementi di geometria.

135. IV. Finalmente se le linee sono rette e curve, la figura piana si chiamerà *mistilinea* (fig. 1.)

136. V. Le rette *AB*, *BC*, *CD*, ecc. (fig. 35) che terminano il poligono, diconsi *lati*, i vertici degli angoli *ABC*, *BCD*, *CDE*, ecc. formati da questi lati sono i *vertici* del poligono.

137. VI. Ogni retta, *AC*, *AD*, *AE*, ecc., che unisce i vertici di due angoli non adiacenti, dicesi *diagonale* del poligono.

138. VII. L'insieme de' lati del poligono forma il suo *contorno* o *perimetro*. Se i lati sono uguali, il poligono dicesi *equilatero*; se sono uguali gli angoli, si chiama *equiangolo*.

139. VIII. Il poligono equilatero ed equiangolo prende il nome di *poligono regolare*.

140. IX. Due poligoni sono *equilateri fra loro*, quando hanno i lati respettivamente uguali, e disposti nel medesimo ordine. Sono poi *equiangoli fra loro*, quando hanno gli angoli respettivamente uguali e disposti nel medesimo ordine.

141. X. I poligoni prendono nomi diversi, secondo il numero dei loro lati. Il poligono di tre lati è il triangolo, di cui si è parlato ne' capitoli precedenti: quello di quattro lati chiamasi *quadrilatero*, quello di cinque *pentagono*, di sei *esagono*, di sette, *ettagono*, di otto, *ottagono*, di nove, *enneagono*, di dieci, *decagono*, di dodici, *dodecagono*, di quindici, *quindecagono* o *pentedecagono*. Per tutti gli altri poligoni non si adoperano nomi derivati dalla lingua greca; ma si enuncia il numero dei lati; e però si dice un poligono di 11, di 13, di 14, di 16, di 17 lati ecc.

142. Nella geometria elementare si considerano solamente i *poligoni convessi*, cioè quelli che non hanno angoli *rientranti*. La fig. 35 rappresenta un poligono convesso, quello dinotato dalla fig. 36 contiene l'angolo rientrante *DEF*.

143. Il poligono convesso è tale che il suo perimetro non può essere segato dai prolungamenti dei suoi lati, al contrario quello del *poligono concavo*, o ad angoli rientranti, può essere segato in due o più punti quando si prolunghi qualche suo lato sufficientemente.

PROPOSIZIONE XXXVI — *TEOREMA*.

144. *La somma di tutti gli angoli interni di un poligono è uguale a tante volte due angoli retti, quante unità sono nel numero dei suoi lati meno due* (fig. 35).

Dim. Sia *ABCDF* il poligono proposto: se dal vertice d'un medesimo angolo *A* si conducano a tutti i vertici degli angoli opposti le diagonali *AC*, *AD*, *AE* è manifesto che il poligono sarà diviso in cinque triangoli, se ha sette lati; in sei triangoli, se ha otto

lati; ed in generale in tanti triangoli quanti sono i lati del poligono meno due; dappoichè questi triangoli possono essere considerati come aventi per vertice comune il punto A, e per basi i differenti lati del poligono, eccetto i due, che formano l'angolo A. Or la somma degli angoli di tutti questi triangoli equivale evidentemente alla somma degli angoli del poligono; dunque questa somma è uguale a tante volte due angoli retti quanti sono i triangoli, vale a dire quante unità sono nel numero de' lati del poligono meno due. Il che bisognava dimostrare (*)

145. *Corollario* I. Da questo teorema si deduce che nel quadrilatero la somma degli angoli è uguale a 4 angoli retti; nel pentagono è uguale a 6 angoli retti; nell' esagono è eguale a 8 angoli retti, nell' ottagono a 12 angoli retti; nel decagono a 16, ec..., ed in generale se n è il numero de' lati del poligono, ed R l'angolo retto, la somma degli angoli sarà espressa da $(n-2)\times 2R$, o sia da $n\times 2R-4R$, o in altri termini:

La somma di tutti gli angoli di un poligono è uguale a tante volte due angoli retti, quanti sono i lati, meno quattro angoli retti.

146. *Corollario* II. Quando il poligono è regolare, ciascuno dei suoi angoli sarà uguale al valore della somma di essi angoli diviso pel loro numero. Epperò un angolo di un poligono regolare di tre lati sarà uguale a $\frac{2}{3}$ di un angolo retto, quello di un poligono regolare di 4 lati sarà uguale ad un retto, quello di un pentagono regolare sarà $\frac{6}{5}$ di un retto, quello di un esagono regolare $\frac{8}{6}$ di un retto, ec..

147. *Corollario* III. Reciprocamente, se si conoscesse la somma degli angoli di un poligono, si potrebbe determinare il numero de' suoi lati. Se per esempio, questa somma equivale a 30 angoli retti, la metà di questo numero, o 15, dinota il numero de' lati del poligono diminuito di due; il poligono ha dunque 17 lati.

PROPOSIZIONE XXXVII — *TEOREMA.*

148. *Se i lati di un poligono* ABCDE *si prolunghino ordinatamente verso una medesima parte, la somma di tutti gli angoli esterni* CBm, DCn, pDE, ecc. *sarà uguale a quattro angoli retti.* (fig. 37).

Dim. Imperocchè ogni angolo esterno CBm fa coll' interno adiacente ABC due angoli retti; e però tutti gli angoli esterni insieme con tutti gl' interni sono uguali a tante volte due retti, quante uni-

(*) Se dal punto E (fig 36) si tirino le diagonali a tutti i vertici del poligono, l'angolo rientrante E sarà composto degli angoli consecutivi FEG, GEA, AEB, BEC, CED, i quali uniti all'angolo FED formano quattro angoli retti (n.64). Quindi il teorema dimostrato qui sopra potrebbe applicarsi al poligono che ha un angolo rientrante, purchè si consideri questo angolo non già secondo la definizione (n. 48), ma come l'eccesso di quattro retti sull'angolo FED.

tà vi sono nel numero de' lati del poligono. Ma tutti gli angoli interni sono uguali a tante volte due retti, quanti sono i lati meno quattro reti (n° 145). Se dunque si tolgono gl' interni, resteranno gli esterni uguali a quattro angoli retti. Il che bisognava dimostrare.

Delle condizioni che determinano i poligoni.

* 149. Esistono per i poligoni in generale, come per i triangoli, alcuni caratteri, dai quali si può dedurre la loro uguaglianza. E poichè siffatti caratteri equivalgono alle condizioni necessarie e sufficienti a determinare un poligono, così ci occuperemo quiappresso di alcune di queste condizioni, dalle quali si potranno, ove si voglia, ricavare facilmente i caratteri corrispondenti dell' uguaglianza dei poligoni.

PROPOSIZIONE XXXVIII — *TEOREMA.*

* 150. *Un poligono* ABCDEF *è determinato, quando si conoscono tutti i suoi lati, e tutte le diagonali* AC, AD, AE, *che partono da un medesimo vertice* A (fig. 35).

Dim. Imperciocchè, è manifesto che se saranno determinati tutti i triangoli in cui si divide il poligono, esso potrà comporsi riunendo insieme quelli triangoli, e quindi risulterà determinato. Or essendo dati tutti i lati del poligono, e tutte le diagonali che partono da un medesimo vertice, ciascuno triangolo *ABC*, *ACD*, ecc. trovasi determinato dai suoi tre lati : dunque il poligono è determinato. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XXXIX — *TEOREMA.*

* 151 *Un poligono* ABCDEF *è determinato quando si conoscono tutti i suoi lati, e tutti i suoi angoli consecutivi* ABC, BCD, *ecc; eccetto i tre ultimi* DEF, EFA, FAB (fig. 35).

Dim. Infatti, il triangolo *ABC* si trova determinato dall'angolo *B*, e dai lati *AB*, *BC* che lo comprendono. Quindi si conoscerà l'angolo *BCA*, ed il lato *AC*. Ma l'angolo *BCD* è dato per ipotesi, dunque sarà ancora dato l'angolo *ACD*, ed i lati *AC*, *DC* che lo comprendono; e per conseguenza il triangolo *ACD* si trova determinato. Nello stesso modo si dimostrerà che tutti i triangoli consecutivi sono determinati, eccetto l'ultimo *AFE*, che sarà determinato dai suoi tre lati, senza che sia necessario conoscere gli angoli *DEF*, *EFA*, *FAB*. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XL — *TEOREMA.*

* 152. *Un poligono* ABCDEF *è determinato, quando si conoscono tutti i suoi lati, e tutti i suoi angoli, eccetto i due lati* EF, FA, *e l'angolo* F *compreso da questi lati* (fig. 35).

Dim. Perocchè si dimostra, come nella proposizione precedente, che tutti i triangoli consecutivi *ABC*, *ACD*, ecc. si trovano determinati, eccetto l'ultimo *AFE*, il quale sarà determinato dal lato *AE*, e dagli angoli *FAE*, *AEF* adiacenti a questo lato, ottenendosi l'angolo *FAE* con togliere dall'angolo dato *FAB* la somma degli angoli in *A* dei triangoli precedenti. Dunque tutto il poligono è determinato. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XLI — *TEOREMA.*

* 153. *Un poligono* ABCDEF *è determinato, quando si conoscono tutti i suoi lati, e tutti i suoi angoli, eccetto il lato* AF, *ed i due angoli adiacenti a questo lato* (fig. 35).

Dim. Infatti si dimostra, come nella proposizione precedente, che tutti i triangoli consecutivi *ABC*, *ACD*, ecc. sono determinati eccetto l'ultimo *AFE*, che sarà determinato dai lati *AE*, *FE*, e dall'angolo *AEF* contenuto da questi lati. Dunque tutto il poligono è determinato. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XLII — *TEOREMA.*

* 154. *Un poligono* ABCDE *è determinato, quando si conosce uno de' suoi lati* AB, *e tutti gli angoli che questo lato fa con i lati e le diagonali che partono dalle sue estremità* (fig. 38).

Dim. Imperciocchè, ciascun vertice *C*, *D*, *E* si trova legato al lato dato *AB* per mezzo di un triangolo *ACB*, *ADB*, *AEB*, nel quale si conosce il lato accennato *AB*, ed i due angoli ad esso adiacenti. Quindi tutti i vertici del poligono si trovano determinati; e però tutto il poligono sarà pure determinato. Il che bisognava dimostrare.

* 155. *Scolio I.* Quando si è detto (n° 93) che un triangolo è determinato dai suoi tre lati, si avrebbe potuto dire in un modo più generale che un triangolo è determinato dai suoi 6 elementi, che sono i lati e gli angoli, meno tre angoli, come avviene in tutti i poligoni. Parimente si potrebbe dire che un triangolo è determinato da tutti i suoi elementi, meno due lati e l'angolo da questi compreso, oppure meno un lato ed i due angoli adiacenti a questo lato, il che ha luogo in tutti i poligoni. Da ciò si deduce in generale che un poligono qualunque, triangolo, quadrilatero, pentagono, ecc. è determinato da tutti i suoi elementi meno tre, salvo

alcune eccezioni, delle quali rispetto al triangolo si è già parlato (n.° 129). Quindi se si rappresenta con n il numero de'lati di un poligono qualunque, $2n$ rappresenterà il numero totale de'suoi elementi; per conseguenza il numero dei dati necessarii alla determinazione di un poligono sarà espresso da $2n-3$. Dal che ne segue esser necessarii $10-3$, o 7 dati per un pentagono; $12-3$, o 9 per un esagono, e così in progresso.

* 156. *Scolio II.* Dalle cose precedenti apparisce la corrispondenza ch' esiste fra le condizioni, che determinano i triangoli, e quelle che determinano i poligoni in generale. Rimane ora a dire qualche cosa intorno alle proprietà de' poligoni relativamente a quelle che appartengono ai triangoli. Si è dimostrato che quando in un triangolo vi sono lati uguali, vi devono essere ancora angoli uguali, e reciprocamente. Si è dimostrato ancora che quando in un triangolo si trovano lati disuguali, vi devono essere ancora angoli disuguali, e reciprucamente. Queste proprietà non hanno luogo necessariamente negli altri poligoni. La maggior parte di essi possono avere tutti i loro lati uguali e tutti i loro angoli disuguali, oppure tutti i loro angoli uguali e tutti i loro lati disuguali. Da ciò si deduce che in un poligono può aver luogo un cangiamento in tutti gli angoli, o in alcuni di essi, senza che vi sia cangiamento ne'lati. e che vi possa essere cangiamento in tutti i lati, o in alcuni di essi, senza che vi sia rangiamento negli angoli. Ciò si vedrà chiaramente in appressu.

CAPITOLO VII.

DEI QUADRILATERI.

157. Fra i quadrilateri se ne trovano alcuni di forma partirolare, che meritano di essere specialmente considerati ; dappoichè godono di molte proprietà importanti.

158. *Definizione* I. Si chiama *Trapezio* il quadrilatero, che ha due soli lati paralleli.

159. Da ciò segue che essendo nel trapezio $ABCD$ (fig. 39), paralleli i lati opposti AB, DC, gli angoli A e D devono essere supplementarj (n° 61), come pure gli angoli B e C.

Si deduce ancora che se l' angolo A è retto (fig. 40), l'angolo D sarà ancora retto.

160. *Definizione* II. Il quadrilatero, che ha i lati opposti paralleli, dicesi *parallelogrammo*.

La fig. 41 rappresenta un parallelogrammo, nel quale i lati opposti AB, DC sono paralleli, come pure i lati AD, BC.

161. *Definizione* III. Si chiama *Parallelogrammo rettangolo*, o più semplicemente *rettangolo* il quadrilatero che ha gli angoli retti, senza avere i lati uguali (fig. 42).

162. *Definizione* IV. Il quadrilatero, che ha i lati uguali senza avere gli angoli retti, dicesi *rombo*: si dà ancora a questa figura il nome di *losanga* (fig. 43).

163. *Definizione* V. Si chiama *quadrato* il quadrilatero che ha i lati uguali, e gli angoli retti (fig. 44).

PROPOSIZIONE XLIII — *TEOREMA.*

164. *In ogni parallelogrammo i lati opposti sono uguali, come pure gli angoli opposti; e la diagonale lo divide in due parti uguali* (fig. 41).

Dim. Nel parallelogrammo *ABCD* si conduca la diagonale *BD*. Essendo *AD* parallela a *BC* saranno uguali gli angoli alterni *ADB*, *DBC*: parimente essendo *DC* parallela ad *AB*, saranno uguali gli angoli alterni *ABD*, *BDC*. Quindi sarà il triangolo *ABD* uguale al triangolo *BDC*, perchè hanno il lato *BD* comune, e gli angoli adiacenti a questo lato rispettivamente uguali. Ma ne' triangoli uguali i lati uguali sono opposti agli angoli uguali, e reciprocamente gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali, dunque sarà il lato $AD = BC$, il lato $AB = CD$, l'angolo $A = C$, e finalmente l'angolo *ABC*, composto de' due angoli *ABD*, *DBC*, eguaglierà l' angolo *ADC* composto dei due *BDC*, *ADB*. Il che bisognava dimostrare.

165. *Corollario. Due rette parallele* AB, CD (fig. 41) *comprese fra due altre parallele* AD, BC *sono uguali.*

Perocchè in tal caso la figura *ABCD* è un parallelogrammo.

PROPOSIZIONE XLIV — *TEOREMA.*

166. *Due parallele sono equidistanti* (fig. 42).

Dim. Siano *AB*, *CD* due rette parallele. Sulla prima s' innalzino le due perpendicolari *AC*, *BD*, queste dovranno essere ancora perpendicolari all' altra (n° 76); e perciò ciascuna di esse misura la distanza scambievole delle due parallele. Ma $AC = BD$, perchè la figura *ACDB* è un parallelogrammo, dunque le due parallele *AB*, *CD* prolungate indefinitamente dall' una e dall' altra parte saranno sempre equidistanti. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XLV — *TEOREMA.*

167. *Se in un quadrilatero i lati opposti sono uguali, la figura sarà un parallelogrammo* (fig. 41).

Dim. Nel quadrilatero *ABCD* sia il lato $AB = DC$, il lato $AD = BC$. Dico che la figura accennata è un parallelogrammo.

Imperocchè se si conduca la diagonale *BD*, i due triangoli *ABD*, *BCD* saranno uguali, perchè hanno i tre lati respettivamente uguali (n° 92). Quindi l' angolo *ADB* opposto al lato *AB* sarà uguale al-

l'angolo *DBC* opposto al lato *CD*: ma questi angoli sono alterni rispetto alle rette *AD*, *BC*, dunque queste rette sono parallele (n°69). Nello stesso modo si dimostra che *AB* è parallela a *CD*, e però il quadrilatero *ABCD* è un prallelogrammo. Il che si doveva dimostrare.

PROPOSIZIONE XLVI — *TEOREMA.*

168. *Se due lati opposti di un quadrilatero sono uguali e paralleli, la figura sarà un parallelogrammo* (fig. 41).

Dim. Nel quadrilatero *ABCD* sia il lato *AB* uguale e parallelo al lato *DC*. Dico che la figura *ABCD* sarà un parallelogrammo.

Si tiri la diagonale *BD*. E poichè *AB* è uguale e parallela a *DC*, gli angoli alterni *ABD*, *BDC* saranno uguali (n° 75). Quindi i due triangoli *ABD*, *CDB* hanno il lato *BD* comune, il lato $AB = DC$, e l'angolo compreso dai due primi uguale all'angolo compreso dai due secondi ; perciò i due triangoli sono uguali, e sarà il lato $AD = BC$. Ma quando in un quadrilatero i lati opposti sono uguali, la figura è un parallelogrammo (n° 167) ; dunque il quadrilatero *ABCD* è un parallelogrammo. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XLVII — *TEOREMA.*

169. *Le diagonali d'un parallelogrammo si tagliano scambievolmente in due parti uguali* (fig. 45).

Dim. Sia il parallelogrammo *ABCD*. Dico che le due diagonali *AC*, *DB* si tagliano scambievolmente in due parti uguali:

Infatti, nei due triangoli *ADO*, *BCO* i lati *AD*, *CB* sono uguali come lati opposti del parallelogrammo; l'angolo *ADO* è uguale all'angolo *OBC* come alterni rispetto alle parallele *AD*, *BC*, e l'angolo $OAD = OCB$ per la stessa ragione, dunque i due triangoli *ADO*. *BOC* sono uguali (n° 88) ; e perciò sarà $AO = OC$, e $DO = OB$ (n° 94). Il che bisognava dimostrare.

170. *Scolio I.* Nel rettangolo *ABCD* (fig.42) le due diagonali non solo si tagliano scambievolmente in parti uguali, ma sono ancora uguali fra loro. Perocchè sono uguali i due triangoli *ABC*.*BAD*, essendo il lato *AB* comune, il lato $AC = BD$, e l'angolo $CAB = ABD$ come retti.

171. *Scolio II.* Nel rombo (fig. 43) le due diagonali sono disuguali, ma si tagliano ad angoli retti. Perocchè essendo i punti *B*, e *D* ugualmente distanti dalle estremità della retta *AC*, la retta *BD*, che divide per metà la *AC* è ad essa perpendicolare (n° 118).

172. *Scolio III.* Dalle cose precedenti risulta che nel quadrato (fig. 44.) le due diagonali sono uguali, e si tagliano ad angoli retti.

PROPOSIZIONE XLVIII — *TEOREMA.*

173. *Costruire un parallelogrammo, essendo dati un angolo, ed i due lati che lo comprendono* (fig. 41).

Sol. Si faccia l' angolo *A* uguale all'angolo dato ; poi su i lati di esso si prendano le due parti *AB*, *AD* uguali respettivamente ai due lati dati. Ciò fatto dal punto *B* si tiri *BC* parallela ad *AD*, e dal punto *D* si tiri *DC* parallela ad *AB*. La figura *ABCD* sarà evidentemente il parallelogrammo richiesto. Il che bisognava fare.

174. *Scolio I.* Si osservi che se l' angolo *BAD* è retto, la figura *ABCD* diviene un rettangolo ; e se di più i lati *AB*, *AD* sono uguali, la stessa figura diverrà un quadrato. Si può dunque con la costruzione indicata descrivere un rettangolo, di cui sono dati due lati che comprendono l'angolo retto, e costruire un quadrato sopra una retta data.

175. *Scolio II.* È facile vedere che il rettangolo si può ancora costruire in un altro modo. Infatti si tiri una retta *AB* (fig. 42) uguale ad uno de' due lati adiacenti dati , indi alle due estremità di questa retta s' innalzino le perpendicolari *AC*, *BD*, ciascuna delle quali si faccia uguale all' altro lato adiacente dato, e si congiunga infine il punto *C* col punto *D*, la figura *ABDC* sarà il rettangolo richiesto in virtù delle proposizioni precedenti.

176. *Scolio III.* Con la costruzione indicata nello scolio precedente si può sopra una data retta *AB* (fig. 44) descrivere il quadrato ; solamente dovrà farsi ciascuna delle due perpendicolari *AD*, *BC* uguale al lato dato *AB*.

CAPITOLO VIII.

DELLE RAGIONI E DELLE PROPORZIONI IN GENERALE.

177. Il principio *dell'esatta soprapposizione* (n° 39) applicato ai triangoli, e le conseguenze che ne abbiamo dedotte, sono state sufficienti a farci scoprire alcune proprietà delle figure piane rettilinee, le quali proprietà si potrebbero chiamare *costitutive* delle figure medesime, in quanto che servono alla loro descrizione geometrica. In tal modo abbiam riconosciuta la possibilità di descrivere tutte le specie di triangoli (n° 121), indi quella di descrivere tutti i poligoni in generale, ed in particolare il trapezio, il parallelogrammo, il rettangolo, il quadrato, il rombo o losanga.

178. Ma quando si vogliono paragonare generalmente le stesse figure tra loro, per valutare le une per mezzo delle altre, allora il principio summentovato dell' esatta soprapposizione non basta più esso solo, e conviene ricorrere alla teorica generale delle ragioni e delle proporzioni. Or siccome ogni grandezza (n° 5) si può ridurre a numero paragonandola ad un'altra della stessa specie presa per unità, così ne consegue che la teorica accennata appartiene

propriamente all'Aritmetica, o piuttosto all'Algebra; ciò non ostante essa verrà esposta qui appresso, affinchè si possa conoscere in qual modo debba adoperarsi nell'applicarla alla quantità continua.

DELLA RAGIONE.

179. Due grandezze non possono paragonarsi l'una all'altra rispetto alla loro quantità se non sono *omogenee*, vale a dire della stessa specie o natura: così una linea non potrà paragonarsi ad una superficie, o ad un solido, ma si paragonerà la linea alla linea, la superficie alla superficie, il solido al solido.

180. Di due grandezze omogenee la minore moltiplicata quanto basta deve alla fine superare la maggiore; e questa proprietà appartenendo esclusivamente alle grandezze omogenee, è stata con ragione da alcuni matematici adottata per carattere distintivo di quelle grandezze.

181. *Definizione* I. Tra due grandezze omogenee disuguali, la maggiore si dice *moltiplice* della minore, quando la minore presa più volte eguaglia la maggiore.

182. *Definizioni* II. *Parte aliquota*, o *summoltiplice* si dice la minore di due grandezze omogenee disuguali, allorchè può esser contenuta un certo numero di volte esattamente nella maggiore.

183. *Definizione* III. *Parte aliquanta* si dirà quella grandezza minore, che non può essere contenuta un certo numero di volte esattamente nella maggiore.

184. *Definizione* IV. S'intende per *comune misura* di due grandezze omogenee una grandezza omogenea con le prime due, ed aliquota di ciascuna di loro.

185. Se dunque una grandezze D è una comune misura di due altre grandezze A e B. ogni parte aliquota di D sarà ancora una comune misura di A e B.

Inoltre è manifesto che se D è comune misura di A, e di una sua parte. lo sarà ancora della rimanente parte.

186. *Definizione* V. Due grandezze omogenee si dicono commensurabili fra loro, quando hanno una comune misura.

187. Per esempio, una linea di 25 palmi, ed una di 10 sono grandezze commensurabili, perchè hanno per comune misura una linea di 5 palmi, la quale è parte aliquota di ciascuna di loro, entrando il 5 esattamente cinque volte nel 25, e due volte nel 10. Così pure una linea di 10 palmi e mezzo, ed una di 1 palmo sono commensurabili tra loro, perchè hanno per comune misura una linea di un mezzo palmo. Sicchè i numeri interi e fratti sono quantità commensurabili, perchè hanno per comune misura l'unità, o una parte di essa. Quindi si deduce che sono commensurabili fra loro quelle grandezze omogenee, le quali si possono esprimere con numeri interi, o fratti.

188. *Definizione* VI. Due grandezze omogenee si dicono *incommensurabili*, allorchè non hanno una comune misura.

189. Appartengono a questa specie di grandezze le radici quadrate o cubiche de' numeri, che non sono quadrati o cubi perfetti, perchè si dimostra nell'Aritmetica (*) che esse non si possono esprimere esattamente nè con numeri interi, nè con numeri frazionarii, ma solamente si può assegnare il loro valore con quella approssimazione che si vuole. Epperò le radici accennate non possono avere per comune misura l'unità, o una parte dell' unità comunque si voglia piccola.

190. *Definizione* VII. *Ragione* o *rapporto* di due grandezze omogene A e B dicesi il quoziente, che si ottiene dividendo l'una per l'altra.

191. Per esempio, la ragione di 30 a 6 è $\frac{30}{6}$ ovvero 5, perchè 5 è il quoziente di 30 diviso per 6.

Reciprocamente la ragione di 6 a 30 è $\frac{6}{30}$, ovvero $\frac{1}{5}$; ed in generale la ragione di A a B sarà espressa da $A : B$, oppure da $\frac{A}{B}$.

192. Da ciò si deduce che la ragione di due grandezze omogenee è un numero, o una frazione, di cui i termini sono espressi dai numeri delle misure comuni contenute nelle due grandezze accennate allorchè si paragonano l' una con l' altra.

Abbenchè la frazione, di cui è parola, non possa esprimersi esattamente nel caso del rapporto incommensurabile, perchè niuna frazione può esprimere esattamente un rapporto incommensurabile, pure essa esiste, dappoichè, come più sopra abbiam detto, si può assegnare il valore di un numero incommensurabile, come sarebbe, per esempio, la radice quadrata di 2, con quella approssimazione che si vuole.

193. *Definizione* VIII. Le due grandezze omogenee che si paragonano fra loro diconsi *termini* della ragione, ed il primo termine si chiama *antecedente*, il secondo *conseguente*. Così nella ragione di $A : B$, l'antecedente è A, ed il conseguente è B.

194. *Una ragione non muta valore, quando si moltiplicano, o si dividano i suoi termini per la stessa quantità.*

Perocchè, una ragione equivale ad una frazione, e si sa che una frazione non cambia di valore, quando i termini di essa si moltiplicano, o si dividono per un medesimo numero. Quindi la ragione di $30 : 6$ è la stessa che quella di $60 : 12$, di $15 : 3$; ed in generale la ragione di $A : B$ equivale a quella di $nA : nB$, indicando con n un numero qualunque.

195. Dalla proposizione precedente s' inferisce che

La ragione di due numeri combinati con frazioni in qualunque modo si può sempre ridurre a quella di due numeri interi.

Abbiasi, per esempio, il rapporto di $8 : \frac{3}{4}$. Riducendo l' intero 8 ad una frazione che ha per denominatore 4, il rapporto accennato sarà uguale a quello di $\frac{32}{4} : \frac{3}{4}$, ovvero a quello di $32 : 3$.

Se il rapporto dato fosse di una frazione ad un' altra, o di una

(*) Vedi l' Aritmetica di *F. Amante* (§ 46).

frazione ad un intero e frazione, è manifesto che in ogni caso si potrà ridurre al rapporto di due frazioni, le quali hanno lo stesso denominatore; e per conseguenza a quello di due numeri interi.

196. Essendo la ragione il quoziente che si ottiene dividendo una grandezza per un'altra dello stesso genere, si dovranno considerare come evidenti le proposizioni seguenti.

1°. Le grandezze che hanno la stessa ragione ad una sola e medesima grandezza, od a grandezze uguali, sono uguali fra loro.

2°. Le grandezze uguali hanno una stessa ragione ad una sola e medesima grandezza.

3°. Le grandezze alle quali una sola e medesima grandezza ha una stessa ragione, sono uguali.

4°. Se due grandezze si paragonano ad una terza, la maggiore sarà quella che vi avrà una maggiore ragione, e viceversa, se una grandezza si paragona a due grandezze disuguali, essa avrà maggior ragione alla grandezza minore.

5°. Le ragioni uguali ad una stessa ragione, o a ragioni uguali, sono uguali fra loro.

197. I termini di una ragione essendo espressi dai numeri delle comuni misure contenute nelle due quantità che si paragonano, ne consegue che per avere la frazione, la quale esprime il rapporto di due linee, basta trovare la massima comune misura di queste medesime linee. Questa ricerca è assai importante, perchè, come si vedrà in appresso, il rapporto di due superficie, ed anche quello di due solidi si può sempre ridurre al rapporto di due linee; ed è questo uno dei più belli risultamenti della geometria.

PROPOSIZIONE XLIX — *PROBLEMA.*

198. *Trovare la massima comune misura, se esiste, di due rette terminate,* AB, CD (fig. 46).

Sol. Se si applica la retta minore *CD* sopra la maggiore *AB* quante volte si può, due casi potranno avvenire: o vi sarà contenuta esattamente un certo numero di volte, o vi sarà un resto minore di *CD*.

Nel primo caso sarà *CD* la massima comune misura richiesta, e l'operazione sarà terminata; dappoichè non vi può essere una grandezza maggiore di *CD*, che sia massima comune misura di *CD* ed *AB*.

Nel secondo caso supponiamo che *CD* sia contenuta in *AB* 2 volte con un resto *B'B* minore di *CD*, si avrà

$$AB=2\times CD+B'B.$$

Or dico che se *M* è la massima comune misura di *AB*, e *CD*, la stessa *M* sarà ancora massima comune misura di *CD* e *B'B*: Infatti essendo *M* massima comune misura di *AB* e *CD*, lo sarà ancora di *AB*, e di $2\times CD$, vale a dire di *AB*, e di una sua parte; per conseguenza lo dovrà essere ancora dall'altra parte *B'B* (n° 185). Quindi

anto sarà trovare la massima comune misura di AB e CD, quanto sarà trovare la massima comune misura di CD e $B'B$.

Si applichi adunque $B'B$ sopra CD, e se $B'B$ si contiene esattamente in CD, sarà $B'B$ la massima comune misura richiesta. Nel caso contrario si avrà un resto, che si porterà sopra $B'B$ e si continuerà in tal guisa a paragonare ciascun resto col resto precedente, finchè si arrivi a trovare un resto che sia contenuto esattamente nel resto precedente, ed allora questo ultimo resto, siccome più sopra si è dimostrato, sarà la massima comune misura delle due rette date. Il che bisognava fare.

199. *Scolio* I. È facile calcolare quante volte l'ultimo resto, vale dire la massima comune misura, considerata come unità, è contenuta in ciascuna delle due rette date AB, CD (fig. 46).

Per esempio, supponiamo che CD sia contenuta 2 volte in AB con un resto $B'B$, e questo 1 volta in CD con un resto FD, il quale sia contenuto 1 volta in $B'B$ con un resto EB, e finalmente che EB sia contenuto in FD, 2 volte esattamente: sarà EB la massima comune misura delle due linee AB, CD.

Ciò premesso, si faccia $BE = 1$, sarà $FD = 2$, $B'B = 3$, $CD = 5$, e finalmente $AB = 13$. Quindi il rapporto di AB : CD sarà uguale al rapporto di $13 : 5$, vale a dire che se la linea CD si prende per unità, la linea AB sarà $\frac{13}{5}$ di CD, e viceversa se si prende AB per unità, la linea CD sarà $\frac{5}{13}$ di AB.

200. *Scolio* II. È manifesto che un arco di cerchio AE (fig. 2) può essere applicato sopra un arco di cerchio AF dello stesso raggio come una linea retta sopra una linea retta. Quindi se gli archi AF, AE sono commensurabili, si potrà trovare la loro comune misura col procedimento indicato nel problema precedente, e si potrà esprimere in numeri il loro rapporto. Vedremo in appresso che un siffatto rapporto è uguale a quello degli angoli ACF, ACE; e per conseguenza se due angoli sono commensurabili, si può trovare la loro comune misura, ed avere l'espressione numerica del loro rapporto.

201. *Scolio* III. Applicando lo stesso procedimento a due linee qualunque può accadere che non si trovi mai un resto, che sia contenuto esattamente nel resto precedente; allora le linee non hanno comune misura, o sia sono incommensurabili (n.° 188). La ricerca del rapporto della diagonale al lato del quadrato, di cui ci occuperemo or ora, non solo offre un esempio della esistenza delle linee incommensurabili, ma fa conoscere che il procedimento sopranominato è geometrico, e non meccanico, come potrebbe sembrare a a prima vista.

PROPOSIZIONE I. — *LEMMA*.

* 202. *In un triangolo rettangolo isoscele* BAC, *se si divida in due parti eguali un angolo acuto* ABC *per mezzo della retta* BD, *e dal punto* D *si conduca* DE *parallela*, *e* DF *perpendicolare alla base* BC, *i triangoli* EAD, DFC *saranno isosceli ed uguali* (fig. 47).

Dim. Infatti, il triangolo ABD è uguale al triangolo BFD, perchè il lato BD è comune, l'angolo retto BAD è uguale all'angolo retto BFD, e l'angolo $ABD = DBF$ per costruzione (n° 88); per conseguenza sarà il lato $AD = DF$ ed il lato $AB = BF$. Or essendo DE parallela a BC, l'angolo esterno AED sarà uguale all'interno opposto ABC, e così pure sarà l'angolo $ADE = ACB$. Ma l'angolo $ABC = ACB$, perchè il triangolo ABC è isoscele, dunque sarà ancora isoscele il triangolo AED; e sarà di più uguale al triangolo DFC; dappoicchè il lato $DF = AD$, come si è già dimostrato, l'angolo $FCD = ADE$ e l'angolo retto $DFC = DAE$ (n° 88). Il che bisognava dimostrare.

* 203. *Corrollario.* Essendo isosceli ed uguali i triangoli AED, DFC si avrà $DF = FC = AE = AD$, e sarà inoltre $ED = DC$, ma $DC = EB$, dunque sarà anche $ED = EB$.

* 204. *Scolio.* Se la costruzione indicata nel lemma precedente si applica al triangolo EAD, cioè si divida l'angolo AED in due parti uguali per mezzo della retta EH, indi si conduca HO perpendicolare, e HL parallela ad ED, si dimostrerà come più sopra che $AE = EO$, $AH = HO$, il triangolo ALH uguale al triangolo HOD, ecc. . . La stessa costruzione si potrebbe applicare al triangolo ALH, indi al triangolo seguente, e così all'infinito.

PROPOSIZIONE LI — *PROBLEMA.*

* 205. *Trovare il rapporto della diagonale al lato del quadrato* (fig. 47.).

Soluzione. Il triangolo rettangolo isoscele ABC potendosi considerare come la metà di un quadrato (n° 164), così sarà BC la diagonale, ed AB, o pure AC, un lato di questo quadrato.

Ciò premesso, si porti il lato AB sopra la diagonale BC del quadrato proposto; ed essendo $AB = BF$, il lato AB sarà contenuto una sola volta nella diagonale col resto FC, che sarà minore di AB, perchè $FC = AD$, ed AD è parte di $AC = AB$. Si porti nuovamente il resto FC sopra AB. Essendo AB composta di AE e di EB, o ciò che vale lo stesso di AE e di ED, ed essendo $AE = OE$, la retta AB conterrà due volte la retta AE con un resto OD minore di AE, ossia conterrà due volte il primo resto FC con un secondo resto OD minore di FC. Se questo secondo resto OD si porti sopra FC, ovvero sopra AE, si dimostrerà similmente che vi è contenuto due volte con un resto GH minore di OD; ed il paragone successivo de' residui ognora più piccoli dovendo dare sempre lo stesso risultamento, perchè i triangoli rettangoli isosceli AED, ALH, ecc. . , con le rispettive costruzioni in essi eseguite, sono tutti nelle identiche condizioni del primo triangolo ABC, ne segue che l'operazione non avrà mai fine, e si potrà arrivare ad un resto tanto piccolo quanto si voglia, senza che sia contennto mai esattamente nel resto precedente. Laonde la diagonale BC, ed il lato AB del quadrato non potranno mai avere una parte aliquota comune per quanto si voglia piccola; e per conse-

guenza sono incommensurabili fra loro (n° 188). Il che bisognava fare.

* 206. *Scolio* I. Non è dunque possibile di esprimere per mezzo di numeri il rapporto esatto della diagonale al lato del quadrato ; ciò non ostante si può sempre assegnarlo con quella approsimazione che si vuole.

Infatti la prima operazione ha dato 1 per quoziente, la seconda ha dato 2, e si è dimostrato che tutte le altre all' infinito daranno sempre 2, per conseguenza si potrà formare una frazione continua, la quale sarà (*).

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}, \text{ ecc. all'infinito.}$$

Ciò posto, supponiamo che questa frazione sia stata calcolata sino al quarto termine inclusivamente, si troverà il suo valore uguale ad $1\frac{12}{29}$, ovvero a $\frac{41}{29}$. Sicchè il rappporto approssimato della diagonale al lato del quadrato equivale a 41 : 29. L'approsimazione si potrà spingere tanto quanto si vuole calcolando un maggior numero di termini.

Noi vedremo in appresso che facendo il lato del quadrato $AB = 1$, la sua diagonale sarà espressa dalla radice quadrata di 2, che si scrive $\sqrt{2}$. Quindi il rapporto della diagonale al lato del quadrato è $\sqrt{2} : 1$, il quale rapporto è un *limite*, cui continuamente si accostano, senza raggiungerlo mai, tutti i moltiplici e successivi rapporti che possono formarsi colla frazione continua mentovata e coll'unità.

* 207. *Scolio II*. Da quanto precede apparisce chiaramente che la circostanza di non potersi assegnare il preciso valore di un rapporto incommensurabile non cambia la natura di un tal rapporto, il quale dovrà sempre considerarsi come il quoziente di una divisione ; o come una frazione, di cui i termini sono espressi da numeri incommensurabili fra loro.

Quindi si deduce che ogni grandezza può ridursi a numero, paragonandola ad un'altra della stessa specie presa per unità ; dappoichè sarà espressa o da un numero intero, o da un numero frazionario, o da un numero incommensurabile, stante che il numero non è tanto la collezione di più unita, quanto il rapporto astratto di qualsivoglia grandezza ad un'altra della stessa specie che si prende per unità ; dimodochè non si può avere idea compiuta del numero senza che si abbia prima idea del rapporto (**).

* 208. *Scolio III* I principii sinora esposti possono condurre ad un'altra generalità intorno al modo di considerare la ragione geometrica. Si è veduto (n° 199) che il rapporto di due grandezze commensurabili si può ridurre a quello di due numeri con cercare

(*) Vedi l'Aritmetica di *F. Amante* (n° 40).
(**) Newton, *Arith. Univer.* pag. 2.

la massima comune misura fra di esse; e che questo procedimento si applica anche alle grandezze incommensurabili (n° 206), con la sola differenza che l'operazione non ha termine. Dunque, uno è il modo di ridurre il rapporto di due grandezze qualunque al rapporto di due numeri interi, cioè quello di cercare la massima comune misura fra le due grandezze: o l'operazione ha termine, o non ha termine, ma nell'uno e nell'altro caso il rapporto potrà sempre essere espresso per mezzo di una frazione continua; che avrà per denominatori i quozienti delle successive divisioni eseguite per la ricerca della massima comune misura (n° 206). Se le grandezze sono commensurabili fra loro, la frazione continua potrà ridursi a frazione ordinaria, e quindi il rapporto delle due grandezze proposte sarà espresso da quello di due numeri interi (n° 199); e se le grandezze sono incommensurabili, la frazione continua non avendo termine, non vi sarà alcuna frazione ordinaria che possa esprimerla esattamente, ma essa potrà essere rappresentata da una infinità di frazioni ordinarie, le quali secondo che si prenderà un numero maggiore di termini della frazione continua, si approssimeranno di più in più al suo vero valore, sino a differirne per una quantità minore di qualunque data.

DELLA PROPORZIONE

209. *Definizione I.* La *proporzione* è l'uguaglianza di due ragioni.

Così essendo 2 il rapporto di 20 a 10, come pure di 12 a 6, i numeri 20, 10, 12 e 6 formeranno una proporzione, che s'indica in questo modo, 20 : 10 : : 12 : 6, e si enuncia dicendo 20 *sta a* 10 *come* 12 *sta a* 6.

In generale se quattro grandezze A, B, C, D sono in proporzione, si scriverà per indicarla

$$A : B :: C : D.$$

210. Dunque in una proporzione esistono quattro termini, cioè due *antecedenti* A e C, e due *conseguenti* B e D. I termini A, e D diconsi *termini estremi*; B e C sono i *termini medii*. L'ultimo termine D considerato separatamente chiamasi *quarto proporzionale*.

211. *Definizione II.* La proporzione si dice *continua*, allorchè i due termini medii sono uguali, tale sarebbe 8 : 4 : : 4 : 2, ed in generale

$$A : B :: B : C.$$

E poichè la proporzione continua consiste propriamente in tre termini è addivenuto che si scrive anche in questo modo

$$\div A : B : C.$$

Da ciò è derivato che il secondo termine chiamasi *medio proporzionale*, perchè fa da conseguente nella prima ragione, e da antecedente nella seconda; e che l'ultimo termine C si dica *terzo proporzionale*.

212 Potendo ogni ragione esser rappresentata da una frazione,

ne segue che la proporzione corrisponde all'uguaglianza di due frazioni. E poichè la ragione di due quantità è un numero astratto, la proporzione consisterà sempre nell'uguaglianza di due numeri astratti. Quindi abbenchè i termini di una medesima ragione sieno necessariamente *omogenei*, pure non è necessario che lo sieno tutti quattro i termini di una proporzione, ma i termini della prima ragione potranno essere *eterogenei* con quelli della seconda; in guisa che i termini della prima ragione possono essere, per esempio, due linee, e quelli della seconda due superficie, o due solidi.

213. Da quanto precede apparisce chiaramente che l' ordine di grandezza de' termini della prima ragione dovrà essere lo stesso di quello dei termini della seconda ragione; e però se in una proporzione il primo termine è maggiore, minore, o uguale al secondo, ancora il terzo sarà maggiore, minore, o uguale al quarto.

Si deduce ancora che se in una proporzione i conseguenti sono eguali, saranno pure uguali gli antecedenti; e reciprocamente se sono eguali gli antecedenti, saranno ancora eguali i conseguenti.

214. *Definizione* III. Se quattro grandezze A, B, C, D formano una proporzione secondo l'ordine con cui sono nominate, cioè sia

$$A : B :: C : D,$$

Si dirà che la ragione di $A : B$ è *diretta* della ragione di $C : D$, o pure che le grandezze A e B sono *proporzionali* alle grandezze C e D. Ma se

$$A : B :: D : C,$$

in tal caso si dirà che la ragione di $A : B$ è *inversa*, o *reciproca* della ragione di $C : D$, o pure che le grandezze A e B sono *inversamente*, o *reciprocamente proporzionali* alle grandezze C e D.

215. Per esempio, se fossero dati i numeri 7, 14, 12, 6, non si potrebbe formare con essi una proporzione disponendoli nell'ordine con cui sono nominati, perchè la ragione 7 : 14 non è uguale alla ragione 12 : 6, ma alla *ragione inversa*, o *reciproca* di 12 : 6, vale a dire a quella di 6 : 12. Quindi si dice che i numeri 7, e 14 sono reciprocamente proporzionali ai numeri 12, e 6, stante che volendo stabilire fra essi la proporzione convien fare una inversione ne' termini della seconda ragione, cioè mettere il conseguente in luogo dell'antecedente, e questo in luogo di quello.

216. Ogni ragione potendo rappresentarsi per mezzo di una frazione, è chiaro che se una ragione 7 : 14 è maggiore di un'altra 7 : 15, l'inversa della prima 14 : 7 sarà minore della inversa della seconda 15 : 7, e viceversa.

PROPOSIZIONE LII — TEOREMA.

217. *Se quattro grandezze commensurabili* A, B, C, D *sono proporzionali, cioè* A : B :: C : D, *il prodotto de' termini estremi sarà eguale a quello de' termini medii.*

Dim. Infatti, essendo per ipotesi la ragione $A : B$ eguale alla ra-

gione $C:D$, le frazioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ saranno ancora eguali fra loro (n° 192). Ma quando due frazioni eguali si riducono allo stesso denominatore, i nnmeratori delle nuove frazioni sono eguali; dunque se si riducono le due frazioni accennate allo stesso denominatore, i numeratori $A \times D$, e $B \times C$, che ne risultano, saranno eguali fra loro; e però il prodotto de'termini estremi sarà eguale a quello de'medii. Il che bisognava dimostrare.

218. *Corollario* I. Quando la proporzione è continua, vale a dire si ha

$$A : B :: B : C$$

Si dimostra come sopra che il prodotto $A \times C$ de'termini estremi è uguale al prodotto $B \times B$ de'termini medii. Ma siccome si è chiamato *quadrato* il prodotto di due fattori eguali, così si dice che

In ogni proporzione continua il prodotto de'termini estremi è uguale al quadrato del termine medio.

In luogo di $B \times B$ si scrive per brevità B^2, che si pronunzia dicendo *B due*, o pure *B quadrato*. La cifra 2 serve ad indicare il numero de' fattori uguali.

219. *Corollario* II. Essendo dati due numeri, per esempio 8 e 2, sarà facile trovare fra essi il medio proporzionale x; poichè il quadrato di x sarà eguale al prodotto 8×2, ossia 16; e per conseguenza x sarà eguale alla radice quadrata di 16, ossia 4. In generale se R, e r sono due numeri dati, il medio proporzionale x fra questi numeri sarà

$$x = \sqrt{R \times r}.$$

220. *Scolio* I. La reciproca della proposizione precedente è manifesta, vale a dire

Se quattro grandezze commensurabili A, B, C, D *sono tali che il prodotto* A×D *delle due estreme è uguale al prodotto* B×C *delle due medie, esse grandezze saranno proporzionali, cioè si avrà*

$$A : B :: C : D.$$

221. *Scolio* II. Quindi si vede che se il prodotto di due grandezze è uguale a quello di due altre, si potrà passare dalla eguaglianza alla proporzione con disporre le quattro grandezze per modo che i fattori di un prodotto figurino da termini estremi, ed i fattori dell'altro prodotto da termini medii della proporzione. Sicchè si dovrà scrivere prima uno de'fattori del primo prodotto, poi ambidue i fattori del secondo, e finalmente il rimanente fattore del primo prodotto.

222. *Scolio* III. Da siffatta disposizione si rende manifesto che la ragione de' fattori A, C non è uguale alla ragione de'fattori D, B, ma alla ragione inversa di questi. Inoltre abbenchè la ragione $A : D$ de' fattori del primo prodotto non sia eguale nè alla ragione diretta, nè alla inversa $B : C$ de' fattori del secondo prodotto, pure per comodità si dice che

Quando il prodotto di due grandezze eguaglia il prodotto di due

altre, i fattori del primo prodotto sono reciprocamente proporzionali ai fattori del secondo.

PROPOSIZIONE LIII — *TEOREMA.*

* 223. *Se quattro grandezze incommensurabili* A, B, C, D *sono proporzionali, cioè* A : B :: C : D, *il prodotto de' termini estremi sarà eguale al prodotto de' termini medii.*

Dim. Imperocchè, i rapporti incommensurabili $A : B$, e $C : D$, possono esser espressi ciascuno da una frazione continua che non ha termine (n° 208), e siccome essi rapporti si suppongono eguali, così devono essere anche uguali, anzi identiche, le frazioni continue corrispondenti. Da ciascuna di tali frazioni si potrà poi formare una serie di frazioni ordinarie, ossia di rapporti fra numeri interi, i quali da principio differiranno di una quantità finita dai rapporti dati $A : B$, e $C : D$, ma poi andranno sempre più avvicinandosi a tali rapporti sino a differirne di una quantità minore di qualunque assegnabile. Inoltre, in virtù della eguaglianza delle frazioni continue, saranno eguali fra loro quelle frazioni ordinarie, o rapporti in numeri interi, che si ottengono da un egual numero di termini delle medesime frazioni continue.

Ciò premesso, supponiamo, per fissare le idee, che il rapporto $\frac{A}{B}$ sia espresso dalla frazione continua di cui si è parlato più sopra (n° 206), cioè

sia $\frac{A}{B} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{ecc...}}}$

Prendendo i primi quattro termini di questa frazione possiamo mettere la frazione ordinaria $\frac{41}{29}$ in luogo di $\frac{A}{B}$. Se dunque si divida B in 29 parti eguali, e si chiami m una di queste parti, A dovrà contenere 41 di queste medesime parti con un resto minore di m. Se poi si prendano cinque termini della frazione continua accennata, si potrà in luogo di $\frac{A}{B}$ mettere la frazione ordinaria $\frac{99}{70}$, e quindi dividendo B in 70 parti eguali, e chiamando n una di queste parti, A dovrà contenere 99 di queste medesime parti con un resto minore di n. Or siccome si possono prendere della frazione continua quanti termini si vogliono, così è manifesto che in luogo di $\frac{A}{B}$ si può mettere una frazione $\frac{A'}{B}$, nella quale A' differisce da A di una quantità minore di qualunque assegnabile. Parimente in luogo di $\frac{C}{D}$ si potrà mettere una frazione $\frac{C'}{D}$, in cui C' differisce da C di

una quantità minore di qualunque assegnabile. Ora essendo eguali i rapporti $\frac{A'}{B}$, e $\frac{C'}{D}$, ossia essendo $A' : B :: C' : D$, ed essendo queste quantità commensurabili, sarà (n°217) $A' \times D = B \times C'$.

Ciò posto, se $A \times D$ non è uguale a $B \times C$, supponiamo che sia maggiore, e sia K la differenza. E poichè A' può differire da A di una quantità minore di qualunque assegnabile, ne segue che il prodotto $A' \times D$ può differire dal prodotto $A \times D$ di una quantità minore di K, ed allora $A' \times D$ sarebbe maggiore di $B \times C$. Ma $A' \times D = B' \times C$, dunque ancora $B' \times C$ sarebbe maggiore di $B \times C$; il che non può sussistere, essendo B' minore di B; e per conseguenza non può essere $A \times D$ maggiore di $B \times C$. Nello stesso modo si dimostra che non può essere minore, dunque $A \times D = B \times C$. Il che bisognava dimostrare.

* 224. *Scolio I.* La moltiplicazione di un numero commensurabile per un numero incommensurabile è nel fatto ineseguibile, perchè un numero incommensurabile essendo un decimale a periodo infinito non si può paragonare all'unità, e però manca il modulo per valutarlo esattamente. Per esempio, la moltiplicazione effettiva di qualunque numero intero o fratto per $\sqrt{2}$ sarà sempre ineseguibile, perchè in luogo di questo numero incommensurabile non si può mettere che un valore più o meno approssimato al vero valore, il quale è un *limite*, di cui non si può avere l'espressione esatta in quantità finite. Lo stesso dovrà dirsi del prodotto di due numeri incommensurabili, eccetto alcuni casi particolari, ne' quali il prodotto si ottiene in quantità finite, come avviene, per esempio, quando si moltiplica $\sqrt{2}$ per $\sqrt{2}$, nel qual caso il prodotto è 2; e così pure allorchè si moltiplica $\sqrt{2}$ per $\sqrt{8}$, il prodotto è $\sqrt{16}$, ossia 4. Ma in generale la moltiplicazione di fatto de'numeri incommensurabili si riduce ad un' approssimazione, che potrà spingersi tanto quanto si voglia; e ciò basta nelle applicazioni, dappoicchè *un'approssimazione indefinita, e ad arbitrio del calcolatore equivale all'esattezza.*

* 225. *Scolio II.* Le considerazioni precedenti servono a far conoscere in che consiste il prodotto de'numeri incommensurabili; ma quello che merita maggior attenzione si è che nell'applicare la teorica delle ragioni e proporzioni alla geometria si ha bisogno soltanto di esser certi che in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è uguale al prodotto de'termini medii; poichè non vi è bisogno di fare la moltiplicazione effettiva de'termini accennati, bastando il solo teorema per dimostrare a rigore le verità geometriche. Quindi svaniscono tutte le difficoltà che potrebbero insorgere nell'applicazione della teorica mentovata alla geometria; difficoltà che a torto sono state dichiarate insuperabili da alcuni matematici. Resterà solamente oscuro il concetto stesso delle grandezze incommensurabili, ma questa oscurità è inerente alla natura del soggetto, nè vi è modo di evitarla, perchè, come già si è visto, nel passaggio del

commensurabile all'Incommensurabile s'incontra sempre l'idea dell'infinito, la quale essendo idea negativa sarà sempre oscura.

PROPOSIZIONE LIV — *TEOREMA.*

226. *Se quattro grandezze sono proporzionali*, permutando *saranno ancora proporzionali.*

Dim. Sieno proporzionali le quattro grandezze A, B, C, D, in guisa che abbiasi $A : B :: C : D$. Dico che permutando saranno ancora proporzionali, cioè si avrà $A : C :: B : D$.

Infatti essendo per ipotesi $A : B :: C : D$, sarà (n° 217) $A \times D = B \times C$; ma il prodotto $B \times C$ è uguale al prodotto $C \times B$, dunque si avrà $A \times D = C \times B$; e passando da questa uguaglianza alla proporzione (n° 221) ne risulterà.

$$A : C :: B : D.$$

Il che bisognava di dimostrare.

227. *Scolio.* Il *permutando* consiste adunque nel paragonare in una proporzione gli antecedenti fra loro, ed i conseguenti fra loro.

228. *Corollario.* La proporzione $A : B :: C : D$ non si altera, se si moltiplicano, o si dividono per un medesimo numero i due antecedenti, o i due conseguenti. Infatti permutando si avrà $A : C :: B : D$; ma la ragione $A : C$ non cangia di valore, allorchè si moltiplicano, o si dividono per lo stesso numero n i suoi termini, dunque sarà $nA : nC :: B : D$, e $\frac{A}{n} : \frac{C}{n} :: B : D$, e permutando di nuovo in queste due proporzioni, apparirà chiara la proposizione enunciata.

PROPOSIZIONE LV — *TEOREMA.*

229. *Se quattro grandezze sono proporzionali*, invertendo *saranno ancora proporzionali.*

Dim. Sieno proporzionali le quattro grandezze A, B, C, D, in guisa che abbiasi $A : B :: C : D$. Dico che invertendo saranno ancora proporzionali, cioè si avrà $B : A :: D : C$.

Imperocchè essendo per ipotesi $A : B :: C : D$, sarà (n° 217) $A \times D = B \times C$, o che vale lo stesso $B \times C = A \times D$; e però passando da questa uguaglianza alla proporzione si avrà

$$B : A :: D : C.$$

Il che si doveva dimostrare.

230. *Scolio I.* Da questa proposizione apparisce che l'*invertendo* si riduce a mettere in una proporzione i conseguenti in luogo degli antecedenti, e reciprocamente.

231. *Scolio II.* In generale si potranno fare nell'ordine de' termini d'una proporzione tutt' i cambiamenti, che si vorranno, purchè il prodotto degli estremi rimanga uguale a quello de' medii.

PROPOSIZIONE LVI. — *TEOREMA.*

232. *Se quattro grandezze sono proporzionali, in guisa che abbiasi* A: B :: C: D, *sarà* componendo A + B: B :: C + D: D, *e* dividendo A — B: B :: C — D: D.

Dim. Si suppone che gli antecedenti A e C sieno maggiori dei conseguenti B e D; poichè se fosse altrimenti si farebbe prima l'invertendo, e si considererebbero come antecedenti i termini B e D. Ciò premesso.

1°. Essendo la ragione di A a B espressa dalla frazione $\frac{A}{B}$, e la ragione di C a D dalla frazione $\frac{C}{D}$, se si aggiunga ad ambedue l'unità, sarà $\frac{A}{B}+1$ uguale a $\frac{C}{D}+1$. Or è evidente che $\frac{A}{B}+1$ equivale ad $\frac{A}{B}+\frac{B}{B}$, poichè ogni grandezza divisa per se stesa deve dare l'unità: parimente $\frac{C}{D}+1$ equivale a $\frac{C}{D}\ \frac{D}{D}$: se dunque si faccia la somma delle due prime frazioni, e quella delle due seconde, sarà $\frac{A+B}{B}$ uguale a $\frac{C+D}{D}$, vale a dire che la ragione di $A+B$ a B è uguale alla ragione di $C+D$ a D, onde si avrà

$$A+B : B :: C+D : D.$$

2°. Se in vece di aggiungere si sottragga l'unità dalle due frazioni $\frac{A}{B}$, e $\frac{C}{D}$; indi in luogo della somma si faccia la sottrazione delle frazioni che ne risultano, si avrà $\frac{A-B}{B}$ uguale a $\frac{C-D}{D}$, vale a dire sarà

$$A-B : B :: C-D : D.$$

Il che bisognava dimostrare.

233. *Scolio.* È facile vedere che il *componendo* riducesi a paragonare la somma dell' antecedente e del conseguente allo stesso conseguente. Potrebbe ancora il *componendo* consistere nel paragonare la somma dell' antecedente e del conseguente allo stesso antecedente.

Il *dividendo* poi si riduce a paragonare l'eccesso dell' antecedente sul conseguente allo stesso conseguente. Si potrebbe ancora paragonare l' antecedente all'eccesso dello stesso antecedente sul conseguente, che gli antichi chiamavano *convertendo*, ma questa denominazione non è più adoperata dai matematici moderni.

PROPOSIZIONE LVII — *TEOREMA.*

234. *Se due proporzioni hanno gli stessi antecedenti, i conseguenti saranno fra loro respettivamente proporzionali.*

Dim. Sieno le due proporzioni $A : B :: C : D$, ed $A : E :: C : F$. Dico che sarà

$$B : D :: E : F,$$

Infatti le due proporzioni proposte danno permutando

$$A : C :: B : D. \text{ ed } A : C :: E : F;$$

per conseguenza la ragione di A a C è uguale tanto alla ragione di B a D quanto alla ragione di E a F: ma due ragioni uguali ad una terza sono uguali fra loro, dunque sarà

$B : D :: E . F$. Il che bisognava dimostrare.

235. *Corollario*. Se due proporzioni hanno gli stessi conseguenti, gli antecedenti saranno fra loro proporzionali ; poichè invertendo i conseguenti divengono antecedenti e reciprocamente.

PROPOSIZIONE LVIII — *TEOREMA*.

236. *Se tre grandezze sono proporzionali a tre altre, e fra le prime la somma di due eguaglia la terza, lo stesso accaderà in corrispondenza fra le seconde.*

Dim. Siano le tre grandezze A, B, C proporzionali alle tre altre a, b, c, dimodochè si abbia

$$A : B : C :: a : b : c,$$

ossia $A : B :: a : b$, $B : C :: b : c$, $A : C :: a : c$; dico che se $A + B = C$, sarà pure $a + b = c$.

Infatti, dalla proporzione $A : B :: a : b$, componendo ed invertendo si ottiene $A : A+B :: a : a+b$. Ma questa proporzione ha gli stessi antecedenti dell'altra $A : C :: a : c$, dunque i conseguenti saranno in proporzione, cioè sarà $A+B : a+b :: C : c$. Or in questa proporzione essendo per ipotesi gli antecedenti eguali, dovranno esserlo ancora i conseguenti, e quindi si avrà $a+b = c$. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LIX — *TEOREMA*.

237. *In ogni proporzione la somma, o la differenza degli antecedenti sta alla somma, o alla differenza de' conseguenti come uno degli antecedenti al suo conseguente.*

Dim. Sia la proporzione $A : B :: C : D$, sarà permutando $A : C :: B : D$. Or se a quest' ultima proporzione si applichi il il componendo, ed il dividendo si avrà

$A + C : C :: B + D : D$, ed $A - C : C :: B - D : D$, e permutando si otterrà in fine $A + C : B + D :: C : D$, ed $A - C : B - D :: C : D$. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LX — *TEOREMA*.

238. *Se si ha una serie di rapporti uguali la somma di tutti gli*

antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come uno degli antecedenti al suo conseguente.

Dim. Sia $A : B :: C : D :: E : F :: G : H$, ecc. Considerando solamente i due primi rapporti, si avrà la proporzione

$$A : B :: C : D,$$

dalla quale (n° 237) si deduce

$$A + C : B + D :: A : B.$$

E poichè il terzo rapporto $E : F$ è uguale al primo $A : B$, si avrà

$$A + C : B + D :: E : F.$$

Or se in questa proporzione si faccia la somma degli antecedenti e quella de' conseguenti, ne risulterà

$A + C + E : B + D + F :: E : F$, o $:: A : B$, e così in progresso. Il che bisognava dimostrare.

Della ragione composta.

239. Una ragione si dice *composta* di due o più ragioni, quando ha per antecedente il prodotto degli antecedenti di quelle ragioni, e per conseguente il prodotto de' conseguenti delle ragioni medesime. Così, essendo date le ragioni di $a : b$, di $c : d$, e di $e : f$; la ragione composta di queste tre ragioni sarà $a \times c \times e : b \times d \times f$. (*).

240. La ragione composta di due ragioni uguali dicesi *duplicata*: si dirà poi *triplicata* se è composta di tre ragioni uguali, ecc...

PROPOSIZIONE LXI — *THEOREMA.*

241. *Se i termini di una proporzione si moltiplicano per i ter-*

(*) Consistendo il valore di una ragione nel quoziente che si otterrebbe dividendo l'antecedente pel conseguente, si è dato a quel quoziente il nome di *esponente*, oppure di *quantità della ragione*. Quindi è avvenuto che alcuni matematici considerando le ragioni componenti relativamente ai loro esponenti hanno definita la ragione composta nel modo seguente:

Una ragione si dice esser composta di due o più ragioni, quando la quantità di quelle è il prodotto delle quantità di queste moltiplicate fra loro.

Ma è facile vedere che questa definizione è una conseguenza immediata della prima; dappoichè moltiplicando fra loro gli antecedenti delle ragioni componenti, ed i conseguenti delle stesse ragioni anche fra loro, si vengono a moltiplicare fra loro le frazioni $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, che sono appunto gli esponenti o le quantità delle ragioni accennate. Gli antichi adoperavano la seconda definizione, perchè non si permettevano di riguardare come numeri i termini di una ragione; ma abbiam visto a suo luogo che questi termini si possono, anzi si devono considerare come numeri, se si vogliono conoscere le quantità geometriche come sono effettivamente senza orpello o mistero.

Laonde con Boscovich, ed altri grandi geometri faremo uso della prima definizione in ciò che concerne la ragione composta.

mini corrispondenti di un'altra, i quattro prodotti, che ne risultano, formeranno una nuova proporzione.

Dim. Sieno le due proporzioni

$$A : B :: C : D, \text{ ed } E : F :: G : H.$$

È manifesto che moltiplicando fra loro i termini corrispondenti di queste proporzioni, cioè A. per E, B per F, C per G, e D per H, nasceranno due ragioni composte di ugual numero di ragioni uguali; e per conseguenza sarà

$$A \times E : B \times F :: C \times G : D \times H.$$

Il che bisognava dimostrare.

242. *Scolio.* È evidente che il teorema avrebbe luogo anche quando le proporzioni date fossero più di due.

PROPOSIZIONE LXII — *TEOREMA.*

243. *Se quattro quantità formano una proporzione, i loro quadrati o i loro cubi formeranno ancora una proporzione.*

Dim. Sia la proporzione

$$A : B :: C : D.$$

Se i termini di questa proporzione si moltiplicano per i termini corrispondenti di una o di due proporzioni identiche alla proporzione data, i prodotti, che risulteranno, saranno proporzionali, in virtù del teorema precedente. Or essendosi chiamato *quadrato* il prodotto di due fattori uguali, e *cubo* quello di tre fattori uguali, ne segue che i termini della proporzione così formata saranno i quadrati o i cubi dei corrispondenti termini della proporzione $A : B :: C : D$.

Il che bisognava dimostrare.

244. *Scolio.* Sia data, per esempio, la proporzione $2 : 3 :: 4 : 6$. Elevando a quadrato si avrà

$$4 : 9 :: 16 : 36.$$

Elevando poi a cubo si avrà.

$$8 : 27 :: 64 : 216.$$

PROPOSIZIONE LXIII — *TEOREMA.*

245. *Reciprocamente, se quattro quantità formano una proporzione, le loro radici quadrate o cubiche formeranno ancora una proporzione.*

Dim. Sia la proporzione

$$2 : 3 :: 4 : 6.$$

La radice quadrata di un numero moltiplicata per se stessa dovrà evidentemente riprodurre il numero accennato. Quindi invece della proporzione data si può scrivere

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} : \sqrt{3} \times \sqrt{3} :: \sqrt{4} \times \sqrt{4} : \sqrt{6} \times \sqrt{6};$$

ma questa proporzione può considerarsi come prodotta dalla moltiplicazione dei termini della proporzione

$$\sqrt{2}:\sqrt{3}::\sqrt{4}:\sqrt{6}$$

per i termini corrispondenti di una proporzione identica, dunque se quattro quantità sono proprorzionali, le loro radici quadrate sono ancora in proporzione. Osservando in fine che la radice cubica di un numero moltiplicata due volte per se stessa deve riprodurre il numero accennato, si vedrà che il teorema ha anche luogo per le radici cubiche. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXIV — *TEOREMA.*

246. *Se sono date tre quantità omogenee A, B, C, la ragione della prima alla terza sarà composta delle ragioni della prima alla seconda, e della seconda alla terza.*

Dim. Perocchè essendo la ragione di A a B espressa dalla frazione $\frac{A}{B}$, e la ragione di B a C dalla frazione $\frac{B}{C}$, ne consegue che la ragione composta di quelle due ragioni sarà espressa dal prodotto di quelle due frazioni $\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}$. Ma questo prodotto è uguale alla frazione $\frac{A}{C}$, poichè si può togliere il fattore B comune al numeratore, ed al denominatore, senza alterare il prodotto accennato; e da un'altra parte $\frac{A}{C}$ esprime la ragione di A a C, dunque la ragione di A a C si compone della ragione di A a B, e della ragione di B a C. Il che bisognava dimostrare.

247. *Scolio.* È manifesto che se le quantità omogenee sono quattro, la ragione della prima all' ultima sarà composta della ragione della prima alla seconda, della seconda alla terza, e della terza alla quarta.

PROPOSIZIONE LXV — *TEOREMA.*

248. *In ogni proporzione continua il primo termine sta al terzo come il quadrato del primo al quadrato del secondo, o come il quadrato del secondo al quadrato del terzo.*

Dim. Imperocchè se A, B, C sono le tre quantità continuamente proporzionali, sarà la ragione di A a C composta della ragione di A a B, e della ragione di B a C (n°246). Ma per la supposta proporzione queste due ragioni sono uguali fra loro, dunque la ragione di A a C sarà composta della ragione di A a B, e della stessa ragione di A; B; e per conseguenza sarà espressa da $A\times A$: $B\times B$, ovvero sarà A a C come il quadrato di A al quadrato di B. Nello stesso modo si dimostra che A sta a C come il quadrato di B al quadrato di C. Il che bisognava dimostrare.

249. *Scolio*. Questo importante teorema si enuncia ancora dicendo: *nella proporzione continua il primo termine sta al terzo in ragion duplicata del primo al secondo, o del secondo al terzo.*

In fatti la ragione del primo termine A al terzo C si compone delle due ragioni uguali $A : B$, e $B : C$; e per conseguenza (n.° 240) sarà duplicata di una di loro.

CAPITOLO IX.

DELLA MISURA DELLE AJE DE' POLIGONI, E DE' RAPPORTI CHE NE DERIVANO.

250. *Definizione I. Misurare* una grandezza significa trovare il numero delle volte, che essa contiene una grandezza della medesima specie, la quale per convenzione si prende per *unità di misura.*

251. Un tal numero di unità convenute è la *misura* della grandezza; e paragonando poi la grandezza misurata a quella che la misura, il detto numero, *considerato astrattamente*, esprime la ragione che passa tra quelle due grandezze.

252. Per esempio (fig. 46). supponiamo che si sia presa la linea *CD* della lunghezza di un piede parigino; e supponiamo inoltre che *CD* sia contenuta esattamente 30 volte in *AB*, in tal caso si dirà che la misura di *AB* è 30 piedi parigini. Con questa frase abbreviata si vuol intendere che la linea *AB* sta alla linea *CD* come il numero astratto 30 sta all'unità.

253. Talvolta l'unità di misura non è contenuta esattamente nella grandezza che si vuol misurare, ma vi è bensì contenuta esattamente una parte aliquota di essa unità; allora la misura della grandezza accennata sarà espressa da un numero frazionario. Così supponendo come sopra che *CD* sia l'unità di misura, e che la sua decima parte sia contenuta 25 volte in *AB*, la misura di questa grandezza verrà espressa da $\frac{25}{10}$ di *CD*; e ciò significa che

$$AB : CD :: 25 : 10.$$

254. Dalle cose precedenti apparisce chiaramente che l'unica maniera di misurare una grandezza qualunque è quella di considerare come cognita e fissa un'altra grandezza della medesima specie, e di determinare il rapporto di quella a questa.

255. L'*aja*, o la superficie d'un poligono sono vocaboli quasi sinonimi. Nondimeno l'aja dinota più particolarmente la quantità superficiale di una figura, in quanto che è misurata o paragonata ad altra superficie.

256. *Definizione* II. Si chiamano *figure equivalenti* quelle che hanno aje uguali. Due figure di forme differentissime possono essere equivalenti: così un cerchio può essere equivalente ad un quadrato, un triangolo ad un parallelogrammo, ad un pentagono, ecc.

La denominazione di *figure uguali* vien limitata a quelle che soprapposte l'una all'altra coincidono in tutti i loro punti. Tali sono

due cerchi di raggi uguali, due triangoli che hanno i lati rispettivamente uguali, ecc.

257. *Definizione* III. S'intende per *altezza* d'un parallelogrammo la perpendicolare che misura la distanza di due lati opposti. Questi lati diconsi *basi* del parallelogrammo.

258. *Definizione* IV, L'*altezza* d'un triangolo è la perpendicolare abbassata dal vertice d'un angolo sul lato opposto, il quale lato prende il nome di *base* del triangolo.

259. *Definizione* V. L'*altezza* d'un trapezio è la perpendicolare che misura la distanza de'suoi due lati paralleli; questi lati si dicono *basi* del trapezio.

260. Misurare l'aja di una figura significa, come più sopra si è detto, paragonarla ad un'altra aja presa per unità.

Il quadrato, che ha per lato l'unità di lunghezza, è stato scelto per *unità di superficie*, o di aja. Se, per esempio, l'unità di lunghezza è il palmo, l'unità di aja è quella di un quadrato che ha per lato un palmo, e che si chiama *palmo quadrato*. Se l'unità di lunghezza è la canna, l'unità di aja è quella del quadrato che ha per lato una canna, e che dicesi *canna quadrata*, e così in progresso.

261. Se dunque si suppone (fig. 48.) che q sia un quadrato, di cui il lato x sia l'unità di lunghezza, misurare l'aja del rettangolo $ACHE$ significa cercare quante volte la sua superficie, o la sua aja contiene quella del quadrato q. Si potrebbe credere che per arrivare a misurare l'aja del rettangolo per mezzo di quella del quadrato unità convenga soprapporre il quadrato al rettangolo, e vedere quante volte vi è contenuto. Nella proposizione seguente vedremo che si può far a meno di ricorrere a questa operazione, la quale non potrebbe praticarsi generalmente parlando.

PROPOSIZIONE LXVI — *TEOREMA.*

262. *L'aja di un rettangolo qualunque* ACHE *ha per misura il prodotto della sua base* CH *per l'altezza* CA (fig. 48).

Dim. Rappsesenti x il lato del quadrato stabilito per unità delle superficie (n° 260). Possono darsi tre casi; 1° quando i lati AC. CH del proposto rettangolo sono ambedue commensurabili col lato x del quadrato unità, 2° quando un lato è commensurabile e l'altro no, 3° quando nessuno de'due lati è commensurabile con x.

1°. Se i lati AC, CH del rettangolo sono commensurabili coll'unità di lunghezza x, supponiamo che questa retta unità adattata successivamente su i lati AC, CH sia contenuta due volte in CH e quattro in AC esattamente. Rimane così divisa la retta AC in quattro parti uguali ne'punti F, D, B, e la CH in due parti nel punto N; ed ognuna di tali parti uguaglierà l'unità lineare x. Per i punti di divisione B, D, F si tirino le rette BP. DK. FG parallele a CH, e pel punto N si conduca NM parallela ad AC. Con questa costruzione il proposto rettangolo $ACHE$ risulterà evidentemente diviso in

piccoli quadrati tutti uguali fra loro ed uguale ciascuno al quadrato unità. Il numero de'quadrati sarà 8, e potrà supporsi composto, o di due serie *CM,NE* ognuna di quattro quadrati, o di quattro serie *BH*, *DP*, *FK*, *AG* ciascuna di due quadrati; onde è chiaro che quel numero sarà il prodotto di 2 per 4; cioè il prodotto del numero delle unità lineari contenute in *CH* pel numero delle unità lineari contenute in *AC*. Ma il numero 8 esprime quanti quadrati unità sono contenuti nel proposto rettangolo, ed è perciò la misura di esso rettangolo (n° 250): dunque *il rettangolo ACHE ha per misura il prodotto de'suoi lati* AC, CH. (*).

2°. Se la base *CH* del rettangolo è commensurabile con l'unità lineare x e l'altezza *AC* incommensurabile, dico che la misura del rettangolo sarà anche $CH \times AC$. Infatti, se è possibile, il rettangolo abbia per misura il prodotto di *CH* per un'altezza minore o maggiore di *AC*, per esempio *CO*. Si prenda dell' unità lineare x una tal parte aliquota *CR*, che sia minore di *AO*. e si porti successivamente sui lati *CH*, *CA* del rettangolo a partire dal punto *C*; essa sarà contenuta un numero esatto di volte in *CH*, e dovrà segnare sul lato *AC* un punto di divisione *L* compreso fra *A* ed *O*. Conducendo pel punto *L* la retta *LD* parallela a *CH*, il rettangolo *LCHD* che ne risulta, avrà i suoi lati commensurabili con l'unità lineare, e perciò che si è dimostrato qui sopra sarà misurato dal prodotto di *CH* per *CL*: ma questo prodotto è evidentemente maggiore di quello di *CH* per *CO*, che si è supposto la misura del rettangolo dato, dunque il rettangolo *LCHD* sarà maggiore del rettangolo *ACHE*, il che è assurdo. Similmente si dimostrerebbe che il rettangolo proposto non può avere per misura il prodotto di *CH* per un'altezza maggiore di *AC*, e quindi, anche in questo secondo caso, il proposto rettangolo ha per misura il prodotto de'suoi lati *AC*, *CH*.

(*) Potrebbe accadere che l'unità lineare x, quantunque commensurabile co' lati *AC*, *CH* del proposto rettangolo, non fosse contenuta esattamente in ciascuno di essi. Allora le tre rette x, *AC*, *CH* dovranno avere una *comune misura* che non sarà x, ma un'*aliquota* di x (n° 185). Supponiamo per fissare le idee, che la terza parte di x sia misura comune delle rette *AC*, *CH*, e riportata successivamente sopra ognuna di esse sia contenuta due volte in *CH*, e quattro in *AC*. Ragionando come qui sopra si concluderà che il proposto rettangolo rimane diviso in 8 quadrati, ciascuno de'quali ha per lato la terza parte dell'unità lineare; ed anche in questa ipotesi il rettangolo avrà per misura il prodotto de' suoi lati. Imperciocchè supponendo fatto il quadrato sull' unità lineare x, diviso ogni suo lato in tre parti uguali, ed uniti i punti di divisione, il quadrato unità sarà evidentemente composto di nove quadrati, ciascuno de'quali ha per lato la terza parte dell' unità lineare; e però ognuno di questi piccoli quadrati sarà la *nona* parte del quadrato unità. Ma il proposto rettangolo conteneva 8 di questi quadrati; dunque esso avrà per misura $\frac{8}{9}$ del quadrato unità. Da un'altra parte il numero 8 è sempre il prodotto del numero delle parti uguali contenute nel lato *CH* pel numero delle parti contenute nel lato *AC*, se non che in questo caso ognuna di quelle parti è $\frac{1}{3}$ dell' unità lineare, onde il prodotto de'due lati espressi in parti dell'unità lineare corrisponde a quello delle frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{3}$, cioè ad $\frac{8}{9}$, quale è appunto la misura del rettangolo proposto.

3° Siano finalmente ambedue i lati CH, CA incommensurabili con l'unità lineare x; se è possibile, in questa terza ipotesi il rettangolo $ACHE$ abbia per misura il prodotto della base CH per un'altezza CO minore di AC. Si prenda un'aliquota di x minore di AO, e si porti ripetutamente sopra AC partendo dal punto C. Un punto di divisione dovrà cadere in L fra A ed O, e compito il rettangolo $LCHD$, esso avrà un lato LC commensurabile con l'unità lineare, e l'altro CH incommensurabile. La sua misura, pel secondo caso, sarà $CH \times CL$, il quale prodotto essendo maggiore di $CH \times CO$ ne risulterà come qui sopra l'assurdo che il rettangolo $CHDL$ parte di $ACHE$ sarebbe maggiore del tutto.

Dunque in ogni caso, *un rettangolo qualunque ha per misura il prodotto della sua base per l'altezza.* Il che bisognava dimostrare.

263. *Corollario.* Quando il rettangolo proposto è un quadrato la base e l'altezza sono uguali; onde per ottenere il numero delle unità di superficie contenute in questo quadrato, basta moltiplicare per se stesso il numero delle unità lineari che contiene uno de'suoi lati. Se, per esempio, il lato di questo quadrato contiene 2 unità lineari, la sua superficie conterrà 2×2, ovvero 4 unità di superficie. In generale se A rappresenta un lato del quadrato, la sua aja sarà espressa da $A \times A$, ovvero A^2: ed ecco perchè in aritmetica si è chiamato *quadrato* il prodotto di un numero per se stesso.

* 264. *Scolio.* Abbenchè una linea comunque moltiplicata non possa mai divenire superficie, e che perciò siffatta generazione della superficie per mezzo delle linee sia ben diversa dalla moltiplicazione, si accordano non pertanto in questo, cioè che il numero delle unità contenute in una linea moltiplicato pel numero delle unità contenute in un'altra produce un *numero astratto di unità* corrispondente alla superficie compresa da queste linee, se per unità di superficie si prenda il quadrato, di cui i lati sono le unità lineari. (*)

Dunque, siasi qualunque la linea presa per unità di misura lineare, purchè si prenda per unità di superficie il quadrato fatto sopra la linea medesima, il numero delle unità lineari contenute nella base di un rettangolo moltiplicato pel numero delle unità lineari contenute nell'altezza esprime non già una retta, ma bensì *un numero astratto* commensurabile, o incommensurabile, che dinota il rapporto dell'aja del rettangolo a quella del quadrato unità, vale a dire (n° 250) rappresenta la misura del rettangolo medesimo (**).

(*) Newton. *Arit. Univ.* p. 4.

(**). Si potrebbe comandare cosa esprime il prodotto de' due lati CH, AC (fig. 48) del rettangolo nel 2.° e nel 3.° caso considerati qui sopra, quando uno o ambedue quelli lati non possono assegnarsi esattamente in parti dell'unità lineare, e quindi in numeri? Una tale circostanza indica che il rettangolo non può esprimersi esattamente nè in numeri interi, nè in numeri frazionarii per mezzo dell'unità superficiale, cioè che il rettangolo è incommensurabile con quella unità, e la sua misura è un numero incommensurabile o irrazionale. Solamente nel 3° caso potrebbe accadere che il prodotto delle linee CH, ed AC dasse un numero commensurabile, come altrove (n° 224) ab-

PROPOSIZIONE LXVII — *TEOREMA.*

265. *Due rettangoli qualunque stanno fra loro in ragion composta della ragione delle basi e della ragione delle altezze* (fig. 49).

Dim. Siano $ABCD$, ed $EFGH$ due rettangoli, di cui AB ed EF sono le basi, AD ed EH le altezze.

In virtù del teorema precedente il rettangolo $ABCD$ ha per misura $AB \times AD$. Parimente il rettangolo $EFGH$ ha per misura $EF \times EH$; per conseguenza i due rettangoli stanno fra loro come i prodotti delle basi moltiplicate per le altezze. Or essendo $AB : EF$ la ragione delle basi, ed $AD : EH$ quella delle altezze, ne segue che la ragione composta di queste due ragioni sarà (n° 239).

$AB \times AD : EF \times EH$; e per conseguenza i due rettangoli stanno fra loro in ragion composta della ragione delle basi e della ragione delle altezze. Il che bisognava dimostrare.

266. *Corollario.* I. Se le altezze AD, EH sono uguali fra loro, la ragione composta $AB \times AD : EF \times EH$, togliendo il fattore comune all' antecedente e al conseguente, si ridurrà a quella delle basi $AB : EF$. Quindi si deduce che

Due rettangoli della stessa altezza stanno fra loro come le basi.

267. *Corollario.* II. Se i rettangoli $ABCD$, ed $EFGH$ fossero equivalenti, allora si avrà

$$AB \times AD = EF \times EH;$$

e passando da questa uguaglianza alla proporzione (n° 221) risulterà

$$AB : EF :: EH : AD, \text{ cioè}$$

Se due rettangoli sono equivalenti, le loro basi stanno in ragion reciproca delle altezze.

La proposizione inversa è manifesta, vale a dire

---

biamo osservato. Ma quando il prodotto delle linee accennate risulta incommensurabile, allora è chiaro che valutando i lati del rettangolo per mezzo di aliquote dell' unità lineare sempre più piccole, si avrà una serie di rettangoli commensurabili con l'unità quadrata, che andranno avvicinandosi di più in più al rettangolo proposto sino a differire per una quantità minore di qualunque data. Il rettangolo proposto sarà dunque un *limite*, al quale gli accennati rettangoli razionali potranno avvicinarsi quanto si vorrà senza però raggiungerlo. Tutto ciò è conforme alla natura delle quantità incommensurabili (n.° 224); nondimeno giova di non perdere di vista quello che ivi si è osservato, vale a dire che nella geometria non si ha bisogno di fare il prodotto effettivo delle linee CH, ed AC, ma solamente di conoscere che quando si prende il quadrato per unità di superficie, l'aja del rettangolo sta a quella di questo quadrato come il numero astratto, qualunque esso siasi, che risulta dal prodotto sopraccennato sta all'unità astratta; e perciò il prodotto di due linee rappresenta il rettangolo contenuto da queste linee. Il prodotto effettivo ha luogo nelle applicazioni della geometria, ed abbiam visto più sopra in qual modo si deve intendere.

Se le basi di due rettangoli sono reciprocamente proporzionali alle altezze, i due rettangoli sono equivalenti.

Infatti, in tal caso si avrà

$$AB : EF :: EH : AD.$$

e per conseguenza sarà $AB \times AD = EF \times EH$, ovvero sarà il rettangolo $ABCD$ equivalente al rettangolo $EFGH$.

268. *Scolio.* Se il rettangolo $EFGH$ si prendesse per unità di misura del rettangolo $ABCD$; il rapporto de'prodotti $AB \times AD$, ed $EF \times EH$ rappresenterebbe il rapporto del rettangolo $ABCD$ alla sua unità di misura, e per conseguenza rappresenterebbe la misura del rettangolo medesimo.

Per esempio, supponiamo $AB = 10$, $AD = 6$, $EF = 3$, ed $EH = 4$, $ABCD : EFGH :: 10 \times 6 : 4 \times 3 :: 60 : 12 :: \frac{60}{12} : 1$. Quindi l'aja del rettangolo $ABCD$ sarà $\frac{60}{12}$ dell' aja del rettangolo $EFGH$, ovvero sarà il quintuplo dell' aja di questo rettangolo.

PROPOSIZIONE LXVIII — *TEOREMA.*

269. *L'aja d'un parallelogrammo ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza* (fig. 50).

Dim, Sia il parallelogrammo $ABCD$. Dico che la sua aja ha per misura il prodotto della base DC per l'altezza CF.

Dal punto D si conduca a CF la parallela DE che incontrerà il prolungamento di BA nel punto E: la figura $EDCF$ sarà un rettangolo equivalente al parallelogrammo $ABCD$. Infatti, ne' triangoli EAD, FCB il lato $ED = CF$ come lati opposti del rettangolo $EDCF$, il lato $AD = BC$ come lati opposti del parallelogrammo $ABCD$, e l'angolo $EDA = FCB$, perchè hanno i lati paralleli e rivolti dalla stessa parte (n° 79). Si aggiunga di comune il quadrilatero $ADCF$, e risulterà il parallelogrammo $ABCD$ equivalente al rettangolo $EDCF$, che ha la stessa base DC, e la stessa altezza CF; e però il parallelogrammo $ABCD$ avrà per misura il prodotto della base per l'altezza. Il che bisognava dimostrare.

270. *Corollario I.* Apparisce da questo teorema che

Due parallelogrammi sono equivalenti quando hanno la stessa base, e la stessa altezza.

271. *Corollario II. Due parallelogrammi qualunque sono in ragion composta della ragione delle basi e della ragione delle altezze.*

Ciò si ricava dalla proposizione LXVII, come pure i corollarii qui appresso.

272. *Corollario III. Due parallelogrammi che hanno la stessa altezza stanno fra loro come le basi.*

273. *Corollario IV. Due parallelogrammi equivalenti hanno le basi in ragion reciproca delle altezze.*

274. *Corollario V. Se le basi di due parallelogrammi sono in ragion reciproca delle altezze, i due parallelogrammi saranno equivalenti.*

PROPOSIZIONE LXIX — *TEOREMA*.

275. *L'aja d'un triangolo ha per misura il prodotto della sua base per la metà della sua altezza* (fig. 51).

Dim. Sia il triangolo *ABC*. Dico che la sua aja ha per misura il prodotto della sua base *BC* per la metà della sua altezza *AD*.

Dal punto *A* si conduca *AE* parallela a *BC*, e dal punto *C* si tiri la retta *CE* parallela ad *AB*. La figura *ABCE* sarà un parallelogrammo, il quale è diviso dalla diagonale *AC* in due parti uguali (n° 164). Ma il parallelogrammo *ABCE* ha per misura il prodotto della base *BC* per l'altezza *AD*, dunque il triangolo *ABC*, che è metà del parallelogrammo, avrà per misura il prodotto della base *BC* per la metà dell'altezza *AD*. Il che bisognava dimostrare.

276. *Corollario I.* Si deduce da questo teorema che

Ogni triangolo è metà del parallelogrammo che ha la stessa base e la stessa altezza.

Quindi divengono manifesti i corollarii seguenti.

277. *Corollario II. Due triangoli della stessa base e delle stessa altezza sono equivalenti.*

278. *Corollario III. Due triangoli qualunque sono in ragion composta della ragione delle basi e della ragione delle altezze.*

279. *Corollario IV. Due triangoli che hanno la stessa altezza stanno fra loro come le basi.*

280. *Corollario V. Due triangoli equivalenti hanno le basi in ragion reciproca delle altezze.*

281. *Corollario VI. Se due triangoli hanno le basi in ragion reciproca delle altezze, saranno equivalenti.*

PROPOSIZIONE LXX — *TEOREMA*.

282. *Due triangoli, che hanno un angolo uguale ad un angolo, stanno fra loro in ragion composta delle ragioni de' lati che comprendono gli angoli eguali*, ovvero *stanno come i rettangoli de' medesimi lati* (fig. 52).

Dim. Siano i due triangoli *ABC*, e *DAE*, che abbiano l'angolo *BAC*=*DAE*. Dico che il triangolo *ABC* sta al triangolo *ADE* in ragion composta di *AB* : *AE*, e di *CA* : *AD*, ovvero come il rettangolo di *AB* in *AC* sta al rettangolo di *AD* in *AE*.

Si pongano i due triangoli in modo che i lati *BA*, *AE* stiano in linea retta, gli altri due *CA*, *AD* staranno pure in linea retta (n° 65); indi si congiunga il punto *B* col punto *D*.

I triangoli *ABC*, *ABD*, *ADE* essendo tre grandezze omogenee, sarà la prima *ABC*, alla terza *ADE* in ragion composta della prima alla seconda, e della seconda alla terza (n° 246). Ma i triangoli *ABC*, *ABD* avendo la stessa altezza, perchè il vertice *B* è comune, e le basi *CA*, *AD* sono situate in una medesima linea retta *CD*, stanno fra loro come le basi accennate (n° 279); ed allo stesso mo-

do il triangolo *BAD* sta al triangolo *ADE* come la base *BA* alla base *AE*; dunque il triangolo *ABC* sta al triangolo *ADE* in ragion composta della ragione di *CA*: *AD* e della ragione di *BA*: *AE*, ovvero sarà il triangolo *ABC* al triangolo *ADE* come $AB \times AC : AD \times AE$, ossia come il rettangolo di *AB* in *AC* al rettangolo di *AD* in *AE*. Il che bisognava dimostrare.

283. *Corollario I.* È manifesto che i due triangoli sarebbero equivalenti se il rettangolo $AB \times AC$ fosse equivalente al rettangolo $AD \times AE$, o che vale lo stesso se si avesse la proporzione

$$AB : AD :: AE : AC.$$

Da ciò si deduce che

Se due triangoli hanno un angolo uguale ad un angolo, ed i lati intorno agli angoli uguali sono reciprocamente proporzionali, essi triangoli saranno equivalenti; e viceversa.

284. *Corollario* II. Essendo ogni parallelogrammo diviso dalla sua diagonale in due triangoli eguali (n° 164), la ragione di due parallelogrammi sarà eguale a quella de' triangoli; e per conseguenza

Due parallelogrammi equiangoli stanno fra loro in ragion composta delle ragioni de' lati che comprendono gli angoli eguali, ovvero *come i rettangoli de' medesimi lati*; *e viceversa.*

PROPOSIZIONE LXXI — *TEOREMA.*

* 285. *Se l' angolo* EBD *è supplemento dell' angolo* ABC, *ed i lati intorno a tali angoli sono reciprocamente proporzionali, il triangolo* DBE *sarà equivalente al triangolo* ABC (fig. 53).

Dim. Perocchè, essendo per ipotesi *AB* : *BE* : : *BD* : *BC*, posta *BF* = *BD*, e congiunta *FE*, sarà pure *AB* : *BE* : : *BF* : *BC*; e però in virtù della proposizione precedente (*Cor.* I. n.° 283) il triangolo *ABC* sarà equivalente al triangolo *FEB*. Ma il triangolo *EBD* è equivalente al triangolo *FEB* perchè hanno uguali basi *BD*, *BF*, e la stessa altezza, essendo il vertice *E* comune e le basi accennate in una medesima linea retta; dunque il triangolo *EBD* è equivalente al triangolo *ABC*. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXII — *TEOREMA.*

286. *L'aja d'un trapezio ha per misura il prodotto della sua altezza per la metà della somma delle basi parallele* (fig. 54).

Dim. Sia *ABCD* un trapezio, in cui i lati paralleli o le basi sono *AB* e *CD*, e l'altezza *DM*.

Si divida il lato *CB* in due parti uguali nel punto *O* e per questo punto si conduca la retta *FE* parallela al lato *AD*; indi si prolunghi *DC* finchè incontri la parallela medesima nel punto *E*. Se si

paragonano i due triangoli *OCE*, ed *OBF* si avrà il lato *CO=OB*, per costruzione, l'angolo *COE=BOF* come verticali, e l'angolo *OCE=OBF* come alterni rispetto alle parallele *AB*, *DE*, segate dalla terza *CB*: dunque questi due triangoli hanno un lato uguale ad un lato, e gli angoli adiacenti a questi lati respettivamente uguali; perciò saranno uguali. Or se da tutta la figura *ADEOB* si toglie alternativamente ciascuno di questi triangoli, rimarrà da una parte il trapezio *ABCD*, e dall'altra il parallelogrammo *ADEF*, che sarà perciò equivalente al trapezio proposto. Ma l'aja del parallelogrammo *ADEF* ha per misura il prodotto della sua altezza *DM* per la sua base *AF*: dunque il trapezio *ABCD* ha per misura lo stesso prodotto, cioè $DM \times AF$.

Ciò premesso, si vede che *AB* è uguale ad *AF* con l'aggiunta di *FB*: al contrario *DC* è uguale a *DE* meno *CE*. Ma *FB=CE*, ed *AF=DE*, dunque le due basi *AB*, *DC* del trapezio prese insieme sono uguali alle due basi *AF*, *DE* del parallelogrammo, e per conseguenza la base *AF* del parallelogrammo è uguale alla *semi-somma*, ossia alla metà della somma delle due basi del trapezio. Quindi il trapezio ha per misura il prodotto della sua altezza *DM* per la semi-somma de'lati paralleli. Il che bisognava dimostrare.

287. *Scolio*. Se pel punto *O* si conduca *OH* parallela alle due basi del trapezio, il punto *H* in cui questa retta incontra il lato *AD* sarà il punto di mezzo di questo lato. Infatti, nel parallelogrammo *DEOH* si ha il lato *DH = OE* (n. 164); per la stessa ragione *HA=OF*; ma *OE=OF*, perchè sono uguali i triangoli *OCE*, *OBF*, dunque sarà pure *DH=HA*. Di più è la retta *OH = AF* come lati opposti del parallelogrammo *AHOF*; perciò si conchiude che

L'aja d'un trapezio ha per misura il prodotto della sua altezza per la retta che unisce i punti di mezzo de'lati non paralleli.

PROPOSIZIONE LXXIII — *PROBLEMA*.

288. *Ad un dato triangolo* ABC *fare un parallelogrammo equivalente* FECG *con un angolo uguale ad un angolo dato* (fig. 55).

Soluzione. Dal punto *A* condotta la retta *AG* parallela alla base *BC*, e questa divisa per mezzo nel punto *E*, si faccia l'angolo *CEF* eguale all'angolo dato, indi si tiri *CG* parallela ad *EF*, il parallelogrammo *FECG* sarà equivalente al triangolo dato *ABC*. Infatti, hanno la stessa altezza, perchè sono compresi fra le stesse parallele, e la base *BC* del triangolo è doppia della base *EC* del parallelogrammo; perciò le loro aje devono essere eguali. Il che bisognava fare.

289. *Scolio*. La risoluzione del problema inverso è manifesta.

PROPOSIZIONE LXXIV — *PROBLEMA*.

290. *Trasformare un poligono in un triangolo equivalente* (fig. 56).

Sol. Sia *ABCDE* il poligono dato: si conduca la diagonale *CE*; ed a questa la parallela *DF*, che incontri il lato *AE* prolungato in *F*: indi si tiri la retta *CF*. I due triangoli *ECD*, *CEF* sono equivalenti, perchè hanno la medesima base *CE*, e la medesima altezza, essendo racchiusi fra le stesse parallele *CE*, *DF*. Se dunque al triangolo *ECD* si sostituisce il triangolo *CEF*, il poligono *ABCDE* verrà trasformato nel poligono equivalente *ABCF*, che ha un lato di meno. Applicando a questo poligono la costruzione precedente si avrà un triangolo equivalente al poligono proposto. È manifesto che la stessa costruzione condurrà a trasformare un poligono di un numero qualunque di lati in un triangolo equivalente. Il che bisognava fare.

291. *Scolio.* Si vede ora non solo la possibilità di misurare l'aja d'un poligono di qualsivoglia numero di lati, ma ancora quella di paragonare fra loro le aje di due poligoni qualunque.

CAPITOLO X.

DELLA PROPORZIONALITA' DE' LATI DE' TRIANGOLI. TEORICA DELLE FIGURE SIMILI.

292. Dopo la perfetta eguaglianza o di sovrapposizione, la più feconda di applicazioni è la equivalenza ossia l'eguaglianza in grandezza indipendentemente dalla forma, di cui abbiam parlato nel capitolo precedente, e che nasce quando da due superficie eguali si sottrae una medesima superficie in siti differenti. Ma oltre a queste due specie di eguaglianza ve ne ha un'altra assai importante la quale consiste nella eguaglianza degli angoli e de' rapporti delle linee, che costituiscono i poligoni. Di questa andiamo ora a trattare.

PROPOSIZIONE LXXV — *TEOREMA.*

293. *Se in un triangolo si conduca una retta parallela ad un lato, gli altri due lati saranno divisi in parti proporzionali* (fig. 57).

Dim. Nel triangolo *ABC* si conduca la retta *DE* parallela a *BC*. Dico che si avrà

$$AD : DB :: AE : EC.$$

Si congiunga il punto *B* col punto *E* ed il punto *C* col punto *D*. I due triangoli *BDE*, e *CED* sono equivalenti, perchè hanno la stessa base *DE*, e la stessa altezza, essendo compresi fra le medesime parallele *BC*, e *DE*; per conseguenza il triangolo *ADE* avrà la stessa ragione ai due triangoli *BDE*, e *CED* (n° 196), vale a dire sarà

$$ADE : BDE :: ADE : CED.$$

Or i triangoli *ADE*, *BDE* hanno la stessa altezza, perchè hanno il vertice *E* comune, e le basi *AD*, *DB* sono situate in una medesima linea retta *AB*, dunque i detti triangoli stanno fra loro come

basi accennate (n° 279). Parimente si dimostra che il triangolo *ADE* sta al triangolo *CED* come la base *AE* alla base *EC* ; e per conseguenza sostituendo alle ragioni de' triangoli quelle delle basi si avrà

$$AD : DB :: AE : EC.$$

Il che bisognava dimostrare.

294. *Corollario.* Da questa proporzione si deduce *componendo* (n° 232) che

1°. $AD + DB : AD :: AE + EC : AE$, ossia $AB : AD :: AC : AE$;

2°. $AD + DB : DB :: AE + EC : EC$, ovvero

$$AB : DB :: AC : EC.$$

PROPOSIZIONE LXXVI — *TEOREMA.*

295. *Se i lati* AB, AC *d'un triangolo* ABC, *sono divisi in parti proporzionali da una retta* DE, *questa sarà parallela al terzo lato* BC (fig. 57).

Dim. I triangoli *ADE*, *BDE* avendo la stessa altezza stanno fra loro come le basi *AD*, *DB*. Parimente il triangolo *ADE* sta al triangolo *CED* come la base *AE* alla base *EC*. Ma per ipotesi si ha

$$AD : DB :: AE : EC,$$

dunque il triangolo *ADE* sta al triangolo *BDE* come lo stesso triangolo *ADE* al triangolo *CED*; e però sarà il triangolo *BDE* equivalente al triangolo *CED*. Or questi due triangoli hanno la stessa base *DE*, dunque devono avere la stessa altezza; ossia devono essere compresi fra le stesse parallele *DE*,*BC*. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXVII — *TEOREMA.*

296. *Se tra due rette* CB, EG *si conducano quante parallele si vogliano* CE, DF, BG, *quelle rette saranno divise in parti proporzionali* (fig. 58).

Dim. Se le due rette date *CB*, *EG* sono parallele, la proposizione enunciata è evidente, poichè in tal caso le parti *CD* , *DB* sono respettivamente uguali alle parti *EF*, *FG*, come lati opposti de' parallelogrammi *CDFE*, *DBGF*. Se poi non sono parallele, si prolunghino finchè s'incontrino nel punto *A*.

Nel triangolo *ADF* essendo *CE* parallela a *DF*, sarà la ragione di *AD* ad *AF* uguale a quella di *CD* ad *EF* (n° 294). Similmente, nel triangolo *ABG* essendo *DF* parallela a *BG* sarà la ragione di *AD* ad *AF* uguale a quella di *DB* a *FG*. Ma due ragioni uguali a una terza sono uguali fra loro, dunque si avrà

$$CD : EF :: DB : FG,$$

ovvero permutando

$$CD : DB :: EF : FG.$$

Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXVIII — *TEOREMA.*

297. *La retta* BD *che divide in due parti uguali l' angolo* CBA *di un triangolo, dividerà il lato opposto* AC *in due segmenti proporzionali ai lati adiacenti* (fig. 59).

Dim. Pel punto *C* si conduca la retta *CE* parallela a *BD*, e si prolunghi il lato *AB* che incontrerà *CE* nel punto *E*; perchè non si possono tirare dal punto *B* due parallele a *CE*.

Considerando le due parallele rispetto alla secante *AE* sarà l'angolo esterno *ABD* uguale all' interno ed opposto dalla stessa parte *BEC* (n° 75); rispetto poi alla secante *BC* gli angoli alterni *CBD*. *BCE* saranno uguali fra loro (n° 75). Ma per ipotesi l'angolo *ABD* è uguale all angolo *CBD*, dunque ancora l'angolo *BEC* sarà uguale all' angolo *BCE*; e perciò sarà il lato $BE = BC$ (n° 112). Or nel triangolo *ACE* la retta *BD* essendo parallela a *CE* si ha la proporzione

$$AD : DC :: AB : BE.$$

Quindi mettendo *BC* in luogo di *BE* si avrà in fine

$$AD : DC :: AB : BC.$$

Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXIX — *TEOREMA.*

298. *Se nel triangolo* ABC *si conduca la retta* DE *parallela al lato* BC, *il triangolo* ADE *sarà equiangolo al triangolo* ABC, *e saranno proporzionali i lati adiacenti agli angoli uguali* (fig. 60).

Dim. Dal punto *D* si tiri *DF* parallela ad *AC*. Essendo *DE* parallela a *BC*, sarà l' angolo esterno *ADE* uguale all' interno ed opposto dalla stessa parte *ABC*. Parimente si dimostra che l' angolo *AED* è uguale all' angolo *ACB*, dunque il triangolo *ADE* è equiangolo al triangolo *ABC*.

In secondo luogo, essendo *DF* parallela ad *AC*, i lati *BA*, *BC* saranno divisi in parti proporzionali (n° 293), e si avrà $BA : DA :: BC : FC$. Ma *FC* è uguale a *DE*, perchè sono lati opposti del parallelogrammo *DECF*, dunque sarà $BA : DA :: BC : DE$. Or in virtù delle parallele *DE*, *BC*, ancora i lati *BA*, e *CA* sono divisi in parti proporzionali, vale a dire che si ha $BA : DA :: CA : EA$, dunque la ragione di *BA* a *DA* è uguale tanto alla ragione di *BC* a *DE*, quanto alla ragione di *CA* ad *EA*; e per conseguenza si avrà

$$BA : DA :: BC : DE :: CA : EA.$$

Quindi il triangolo *ABC* è equiangolo al triangolo *ADE*, ed i lati adiacenti agli angoli uguali sono proporzionali. Il che bisognava dimostrare.

299. *Scolio I.* Ne'triangoli equiangoli i lati adiacenti agli angoli uguali sono stati chiamati *lati omologhi*, e quelli stessi angoli si so

no detti *angoli omologhi* (*). Così, il lato *AB* è omologo ad *AD*, *il* lato *BC* a *DE*, ed il lato *AC* ad *AE*.

300. *Scolio II.* Immaginiamo che il lato *BC* si muova parallelamente a se stesso verso il punto *A*, il triangolo *ABC* andrà impicciolendosi a misura che il lato *BC* più si avvicina al punto *A*, ma per ciò che più sopra si è dimostrato conserverà sempre la stessa forma e varierà nella sola grandezza. Or siccome nel linguaggio comune due oggetti si dicono *simili*, quando la forma è in ambedue la stessa, ma la grandezza è diversa, così volendosi serbare una certa analogia colla comune maniera di parlare si è fatta la seguente

Definizione. Due triangoli si dicono simili, quando hanno gli angoli uguali ciascuno a ciascuno, ed i lati omologhi proporzionali.

Quindi si deduce che se in un triangolo *ABC* si conduca una retta *DE* parallela ad un lato *BC*, il triangolo *ADE* sarà simile al triangolo *ABC*. Si deduce ancora che due triangoli uguali sono sempre simili, ma non *viceversa*, vale a dire che due triangoli simili possono essere assai disuguali.

PROPOSIZIONE LXXX — *TEOREMA*.

301. *Se dal vertice di un triangolo* ABC *si conducano quante parallele si vogliano* AE, AG, *ecc. alla base* BC, *queste divideranno la base medesima e la sua parallela* DF *in parti proporzionali* (fig. 63).

Dim. Perocchè, nel triangolo *ABE* essendosi condotta la parallela *DL* alla base *BE* sarà (n.° 298) $AE : AL :: BE : DL$. Per la stessa ragione nel triangolo *AEG* sarà $AE : AL :: EG : LO$; ma due ragioni eguali ad una terza sono eguali fra loro, dunque $BE : DL :: EG : LO$. Considerando i due triangoli *AEG*, *AGC* in vece dei due *ABE*, *AEG*, si dimostrerà nello stesso modo che $EG : LO :: GC : OF$, e però si avranno le ragioni eguali $BE : DL :: EG : LO :: GC : OF$. Il che bisognava dimostrare.

Caratteri della simiglianza de' triangoli.

PROPOSIZIONE LXXXI — *TEOREMA*.

302. *Due triangoli sono simili, quando hanno gli angoli rispettivamente uguali* (fig. 61).

Dim. Ne' triangoli *ABC*, *FGH* sia l'angolo $A = F$, $B = G$, $C = H$. Dico che i due triangoli saranno simili.

Sul lato *AB* supposto maggiore di *FG* si prenda $AD = FG$, e si tiri *DE* parallela a *BC*. Da questa costruzione risulta che l'angolo *ADE* è uguale all'angolo *ABC* (n° 75): ma per ipotesi l'angolo

(*) *Omologo* è parola greca, e significa *simile ragione*.

$ABC = FGH$, dunque sarà ancora l' angolo $ADE = FGH$; e per conseguenza il triangolo ADE sarà uguale al triangolo FGH, perchè hanno un lato uguale a un lato e gli angoli adiacenti a questi lati respettivamente uguali. Ma il triangolo ADE è simile al triangolo ABC (n° 299), dunque sarà ancora il triangolo FGH simile al triangolo ABC. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXXII — *TEOREMA.*

303. *Due triangoli sono simili, quando hanno i lati respettivamte proporzionali* (fig. 61).

Dim. Ne'triangoli ABC, FGH sia $AB : FG :: AC : FH :: BC : GH$. Dico che i due triangoli sono simili.

Si prenda sul lato AB una parte $AD = FG$, e si conduca DE parallela a BC. Si avrà (n° 294) la proporzione $AB : AD :: AC : AE$: ma per ipotesi si ha $AB : FG :: AC : FH$; dunque essendo in queste due proporzioni gli antecedenti uguali, si avrà (n° 234), $AD : FG :: AE : FH$. Ma per costruzione $AD = FG$; dunque dovrà essere ancora $AE = FH$ (n° 213). Parimente si dimostra che $DE = GH$, poichè da una parte (n° 298) si ha $AB : AD :: BC : DE$, e dall'altra si ha per ipotesi $AB : AD :: BC : GH$. Quindi i due triangoli ADE, FGH hanno i tre lati rispetitivamente uguali, e perciò sono uguali. Or il triangolo ADE è simile al triangolo ABC (n° 298), dunque sarà ancora il triangolo FGH simile al triangolo ABC. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXXIII — *TEOREMA.*

304. *Due triangoli sono simili, quando hanno un angolo uguale a un angolo, e sono proporzionali i lati che comprendono gli angoli uguali* (fig. 61).

Dim. Abbiano i due triangoli ABC, FGH l'angolo $A = F$, e sia inoltre $AB : FG :: AC : FH$. Dico che il triangolo ABC è simile al triangolo FGH.

Sul lato AB si prenda $AD = FG$, e si tiri DE parallela a BC. Si avrà (n° 294) la proporzione $AB : AD :: AC : AE$; ma per ipotesi $AB : FG :: AC : FH$, dunque essendo in queste due proporzioni gli antecedenti uguali sarà $AD : FG :: AE : FH$. Ma per costruzione $AD = FG$, dunque dovrà essere ancora $AE = FH$, e per conseguenza sarà il triangolo ADE uguale al triangolo FGH, poichè hanno due lati respettivamente uguali a due lati, e l'angolo compreso dai primi uguale all'angolo compreso dai secondi. Or il triangolo ADE è simile al triangolo ABC (n° 298), dunque ancora il triangolo FGH sarà simile al triangolo ABC. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXXIV — *TEOREMA.*

305. *Due triangoli sono simili, quando hanno i lati respettivamente paralleli* (fig. 61.)

Dim. Sieno i lati *AB*, *AC*. *BC* del triangolo *ABC* respettivamente paralleli ai lati *FG*, *FH*, *GH* del triangolo *FGH*. Dico che il triangolo *FGH* è simile ai triangolo *ABC*.

Infatti gli angoli *A*, e *F* sono uguali perchè sono compresi fra lati paralleli e rivolti dalla stessa parte. Parimente si dimostra che l'angolo $C = H$, e l'angolo $B = G$, dunque i due triangoli *ABC*, *FGH* sono equiangoli e perciò simili. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXXV — *TEOREMA.*

306. *Due triangoli sono simili, quando hanno i lati rispettivamente perpendicolari* (fig. 62).

Dim. Ne' triangoli *ABC*, *EDF* sia il lato *DE* perpendicolaro ad *AB*, il lato *FD* ad *AC*, ed il lato *EF* a *BC*. Dico che il triangolo *ABC* è simile al triangolo *EDF*

Infatti, nel quadrilatero *AIDH* la somma dei quattro angoli equivale a quattro retti (n° 145): ma gli angoli *DHA*, e *DIA* sono retti per supposizione, dunque la somma de'due rimanenti *HAI*, ed *HDI* dovrà essere ugnale a due retti. Or la somma degli angoli adiacenti *HDI*, *FDI* è pure ugnale a due retti; perciò se si toglie il comune angolo *HDI*, resterà l'angolo *FDE* uguale all'angolo *BAC*. Nello stesso modo si dimostra che l'angolo $E = B$, e l'angolo $F = C$. Quindi i due triangoli *ABC*, *EDF* sono equiangoli; e per conseguenza sono simili. Il che bisognava dimostrare.

307. *Scolio I.* Nella dimostrazione precedente si è considerato il triangolo *EDF* come situato dentro del triangolo *ABC*; dappoichè se stasse fuori come il triangolo *E'D'F'*, di cui i lati prolungati si suppongono perpendicolari rispettivamente ai lati del triangolo *ABC*, in tal caso si descriverà dentro di questo triangolo il triangolo *EDF*, che abbia i lati rispettivamente paralleli a quelli del triangolo *E'D'F'*. È manifesto che in virtù delle parallele i lati del triangolo *EDF* saranno rispettivamente perpendicolari ai lati del triangolo *ABC*, e perciò il triangolo *E'D'F'* sarà simile al triangolo *ABC*.

308. *Scolio. II.* Dalle cinque proposizioni precedenti si può concludere che due triangoli sono simili.

1°. *Quando hanno due angoli uguali ciascuno a ciascuno.*

2°. *Quando hanno i lati proporzionali.*

3°. *Quando hanno un angolo uguale ad un angolo, e sono proporzionali i lati che comprendono gli angoli uguali.*

4°. *Quando hanno i lati respettivamente paralleli.*

5°. *Quando hanno i lati respettivamente perpendicolari.*

309. *Scolio III.* Merita ancora di essere osservato che nei *triangoli simili* i lati omologhi sono sempre opposti agli angoli uguali.

Pare dunque che i lati omologhi avrebbero potuto definirsi dicendo esser quelli, che ne' triangoli equiangoli sono opposti agli angoli uguali. Ma questa definizione non avrebbe potuto applicarsi ai poligoni simili di qualunque numero di lati, poichè in questi poligoni i lati non sono opposti agli angoli, e nulladimeno si considerano ancora in queste figure i lati omologhi, cioè i lati adiacenti agli angoli uguali.

PROPOSIZIONE LXXXVI — *TEOREMA*.

310. *I triangoli simili stanno fra loro come i quadrati de' lati omologhi* (fig. 61).

Dim. Siano i due triangoli simili *ABC*, *FGH*: dico che stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi *AB*, *FG*, ovvero *AC* *FH*, o infine *BC*, *GH*.

Infatti, essendo simili i due triangoli sarà l'angolo $A = F$: ma quando due triangoli hanno un angolo eguale ad un angolo stanno fra loro in ragion composta delle ragioni de' lati che comprendono gli angoli eguali (n° 282), dunque sarà il triangolo *ABC* al triangolo *FGH* in ragion composta della ragione di *AB*: *GF*, e di *AC*: *FH*, ovvero (n° 240) in ragion duplicata di *AB* : *FG* , perchè in virtù della simiglianza de'triangoli la ragione di *AB* : *FG* è uguale a quella di *AC* : *FH*. Ma la ragion duplicata di *AB* : *FG* è la stessa che quella de' quadrati; per conseguenza sarà il triangolo *ABC* al triangolo *FGH* come il quadrato di *AB* al quadrato di *FG*. Il che bisognava dimostrare.

Proprietà del triangolo rettangolo.

PROPOSIZIONE LXXXVII — *TEOREMA*

311. *Nel triangolo rettangolo* ABC, *se dal vertice* A *dell'angolo retto si abbassi la perpendicolare* AD, *sopra l ipotenusa*, *i triangoli* ADB, ADC *saranno simili fra loro*, *ed a tutto il triangolo* ABC (fig. 64).

Dim. Infatti, i due triangoli *ABD* ed *ABC* sono rettangoli ambedue, ed hanno l' angolo *B* comune, dunque sara il terzo angolo *BAD* del primo uguale al terzo angolo *C* del secondo; e perciò il triangolo *ABD* è simile al triangolo *ABC*. Parimente i due triangoli *ADC*, ed *ABC* sono ambedue rettangoli, ed hanno l'angolo *C* comune, dunque sarà l' angolo *DAC* del primo uguale all' angolo *B* del secondo; e per conseguenza il triangolo *ACD* è simile al triangolo *ABC* Quindi i due triangoli *ABD*, e *ADC* essendo equiangoli al triangolo *ABC* saranno simili fra loro, ed al triangolo *ABC*. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXXVIII — *TEOREMA.*

312. *Nel triangolo rettangolo* ABC *la perpendicolare abbassata dal vertice dell' angolo retto sopra l' ipotenusa è media proporzionale fra i due segmenti della medesima ipotenusa ; e ciascun cateto è medio proporzionale fra l' ipotenusa ed il segmento adiacente al cateto medesimo* (fig. 64)

Dim. I. Essendo simili i due triangoli *ABD*, *ADC*, i lati omologhi saranno proporzionali, ma questi sono opposti ai lati eguali (n° 309) , dunque il lato *BD* che nel primo triangolo è opposto all'angolo *BAD* avrà per omologo il lato *AD* che nel secondo triangolo è opposto all' angolo $C = BAD$. Similmente si dimostra che il lato *AD* del primo triangolo ha per omologo il lato *DC* del secondo ; e per conseguenza si avrà la proporzione continua

$$BD : AD :: AD : DC,$$

ovvero che la perpendicolare *AD* è media proporzionale fra i due segmenti dell' ipotenusa.

II. Se ora si paragona ciascun triangolo parziale *ABD* , *ADC* al totale *ABC*,e si tenga presente come sopra che i lati omologhi sono opposti agli angoli eguali, si avranno le due proporzioni continue $BC : AB :: AB : BD$, e $BC : AC :: AC : DC$, vale a dire che ciascun cateto è medio proporzionale fra l' ipotenusa ed il segmento adiacente al cateto medesimo. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE LXXXIX — *TEOREMA.*

313. *Nel triangolo rettangolo* BAC *i quadrati de' cateti stanno come i segmenti adiacenti dell' ipotenusa, ed il quadrato dell' ipotenusa sta al quadrato di un cateto come l' ipotenusa al segmento adiacente al cateto medesimo* (fig. 64).

Dim. I. Essendo il cateto *AB* medio proporzionale fra l' ipotenusa *BC*, ed il segmento *BD* (n.° 312), sarà il quadrato di *AB* eguale al rettangolo di *BC* in *BD*. Similmente si dimostra che il quadrato di *AC* è uguale al rettangolo di *BC* in *DC* , dunque i due quadrati stanno come i due rettangoli, i quali avendo la stessa base *BC* stanno come le altezze *BD*, *DC* (n.° 266); e per conseguenza sarà

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC.$$

II. In secondo luogo essendo $BC : AB :: AB : BD$, sarà (n° 248) *BC* a *BD* come il quadrato di *BC* al quadrato di *AB* ;

e così pure essendo $BC : AC :: AC : DC$, sarà *BC* a *DC* come il quadrato di *BC* al quadrato di *AC*. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XC — *TEOREMA.*

314. *Nel triangolo rettangolo* BAC *il quadrato di un cateto sta*

al quadrato della perpendicolare AD *come l' ipotenusa al segmento adiacente all' altro cateto* (fig. 64).

Dim. Infatti, il quadrato di *AB* è eguale al rettangolo di *BC* in *BD*, ed il quadrato di *AD* al rettangolo di *BD* in *DC* (n.° 312); e perciò i due quadrati stanno come i due rettangoli. Ma questi stanno fra loro come le basi *BC*, *DC*, perchè hanno la stessa altezza *BD*, dunque

$$\overline{AB}^2 : \overline{AD}^2 :: BC : DC.$$

Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XCI — *TEOREMA.*

315. *Il quadrato fatto su la ipotenusa di un triangolo rettangolo* BAC *è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra i cateti* (fig. 64).

Dim. Infatti, abbassando dal vertice *A* dell' angolo retto la perpendicolare *AD* sull' ipotenusa, risulteranno i tre triangoli rettangoli *ABC*, *ABD*, *ADC*, i quali essendo simili stanno fra loro come i quadrati de' lati omologhi, ovvero come i quadrati de'lati *BC*,*AB*, *AC*, che sono le ipotenuse de' triangoli accennati. Ma il triangolo *ABC* è uguale alla somma dei due triangoli *ABD*, *ADC*, dunque (n.° 256), ancora il quadrato di *BC* sarà eguale alla somma dei due quadrati di *AB*, e di *AC*. Il che bisognava dimostrare.

Altra dimostrazione.

Sopra i lati *BC*, *AB*, *AC* (fig. 65) del triangolo rettangolo *ABC* si descrivano i quadrati *BE*, *BG*, *CH*; indi dal punto *A* si abbassi la perpendicolare *AM* sul lato *LE*, e finalmente si tirino le diagonali *AL*, *FC*.

I due triangoli *ABL*, *FBC* sono uguali, perchè $AB = BF$ come lati di un medesimo quadrato, $BL = BC$ per la stessa ragione, e e l'angolo *ABL* formato dall'angolo retto *CBL* e dall'acuto *ABC* è uguale all'angolo *FBC* formato dall'angolo retto *FBA* e dallo stesso angolo acuto *ABC*. Ma il triangolo *ABL* è metà del rettangolo *BM*, perchè hanno la stessa base *BL*, e la stessa altezza *BD*, essendo compresi fra le stesse parallele *BL*, ed *AM*; e parimente il triangolo *FBC* è metà del quadrato *BG*, perchè hanno la stessa base *BF*, e la stessa altezza *BA*, essendo compresi fra le stesse parallele *BF*, e *CG*, dunque sarà il rettangolo *BM* equivalente al quadrato *BG*. Similmente si dimostra che il rettangolo *MC* è equivalente al quadrato *CH*; e per conseguenza il quadrato *BE* fatto sull' ipotenusa *BC* sarà uguale alla somma de' quadrati fatti sopra i cateti. Il che bisognava dimostrare (*).

(*) Pitagora fu primo a dimostrare questa proposizione, la quale perciò è

De' poligoni simili.

316. Applicando ai poligoni in generale la nozione della similitudine de' triangoli risulta la seguente

Definizione. Due poligoni si dicono simili, quando hanno gli angoli uguali ciascuno a ciascuno, ed i lati omologhi proporzionali.

317. Ne' triangoli simili l'uguaglianza degli angoli è una conseguenza della proporzionalità de' lati, e viceversa, per cui una di queste condizioni è sufficiente a stabilire la similitudine de' triangoli. Un tale legame cessa di esistere ne' poligoni simili d'un maggior numero di lati, dappoicchè in queste figure si può alterare la proporzionalità de' lati senza cangiare gli angoli, o pure si possono alterare gli angoli senza mutare i lati. Per esempio, se nel quadrilatero *ABCD* (fig. 39) si tiri una retta *EF* parallela al lato *BC*, l'angolo *AEF* sarà uguale all'angolo *B* e l'angolo *DFE* all'angolo *C*; per conseguenza il quadrilatero *ADFE* sarà equiangolo al quadrilatero *ABCD*, ma la proporzione de' lati è differente. Similmente senza alterare i quattro lati *AB*, *BC*, *CD*, *DA* si possono alterare gli angoli, con avvicinare o allontanare il punto *B* dal punto *D* ed il punto *A* dal punto *C*. Da queste considerazioni risulta che per dimostrare la similitudine di due poligioni si deve provare che hanno gli angoli uguali ciascuno a ciascuno, ed i lati omologhi proporzionali.

PROPOSIZIONE XCII — *TEOREMA.*

318. *Due poligoni simili possono dividersi nello stesso numero di triangoli simili rispettivamente, e similmente situati* (fig. 66.)

Dim. Sieno i due poligoni simili *ABCDE*, *FGHLO*. Dai vertici *A*, *F* di due angoli omologhi si conducano le diagonali *AC*, *AD*, *FH*, *FL*.

Per la simiglianza de' poligoni è l'angolo $B = G$, ed i lati *AB*, *BC* sono proporzionali ai lati *FG*, *GH*: per conseguenza (n° 304) il triangolo *ABC* è simile al triangolo *FGH*, onde sarà l'angolo *BCA* uguale all'angolo *GHF* Parimente l'angolo *BCD* è uguale all'angolo *GHL*; se dunque si tolga dal primo l'angolo *BCA* e dal secondo il suo eguale *GHF*, resterà l'angolo *ACD*, uguale all'angolo *FHL*. Or essendo simili i triangoli *ABC*, *FGH* la ragione di *BC* a *GH* è uguale alla ragione di *AC* a *FH*: ma per la simiglianza de' poligoni la ragione di *BC* a *GH* è uguale a quella di *CD* ad *HL*, dunque sarà la ragione di *AC* a *FH* uguale a quella di *CD* a *LH*; e per conseguenza i triangoli *ACD*, *FHL* sono simili. Nello stesso modo si dimostrerà che il triangolo *ADE* è simile al triangolo *FLO*, e così

---

conosciuta col nome di *teorema pittagorico*. La prima dimostrazione riportata nel testo è generale, perchè, come vedremo in appresso, si applica a tutt' i poligoni simili descritti sopra i tre lati del triangolo rettangolo, ed anche ai cerchi che avessero per diametri i medesimi lati.

in progresso se vi fossero altri triangoli. Dunque i poligoni simili si possono decomporre nello stesso numero di triangoli simili rispettivamente e similmente disposti. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XCIII — *TEOREMA*.

319. *Due poligoni sono simili, allorchè sono divisi nello stesso numero di triangoli simili rispettivamente, e similmente situati* (fig. 66).

Dim. Sieno i due poligoni *ABCDE*, *FGHLO*, ne' quali si suppone il triangolo *ABC* simile al triangolo *FGH*, il triangolo *ACD* simile al triangolo *FHL*, ed il triangolo *ADE* simile al triangolo *FLO*. Dico che i due poligoni sono simili.

Essendo per ipotesi il triangolo *ABC* simile al triangolo *FGH*, sarà l'angolo $B = G$, e l'angolo *BCA* uguale all'angolo *GHF*. Parimente essendo il triangolo *ACD* simile al triangolo *FHL*, sarà l'angolo *ACD* uguale all'angolo *FHL*. Quindi tutto l'angolo *BCD* sarà uguale a tutto l'angolo *GHL*; e così pure si dimostrerà che l'angolo $D = L$, l'angolo $E = O$, e l'angolo $A = F$. Dunque i due poligoni sono equiangoli; rimane a dimostrare che i lati omologhi sono proporzionali.

Or essendo simili i triangoli *ABC*, *FGH*, si ha *BC*: *GH*: : *AC*: *FH*. Ma per la simiglianza de' triangoli *ACD*, *FHL* si ha *AC*: *FH*: *CD*: *HL*, dunque la ragione di *AC* a *FH* è uguale tanto alla ragione di *BC* a *GH*, quanto a quella di *CD* ad *HL*; e per conseguenza si avrà *BC*: *GH* : : *CD*; *HL*. Nello stesso modo si dimostra che i rimanenti lati omologhi sono proporzionali, dunque i poligoni proposti sono simili. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XCIV — *TEOREMA*.

320. *I poligoni simili stanno fra loro come i quadrati de' lati omologhi* (fig. 66).

Dim. Sieno i due poligoni simili *ABCDE*, *FGHLO*. Dai vertici *A*, *F* di due angoli omologhi si conducano le diagonali *AC*, *AD*, *FH*, *FL*.

I due triangoli *ABC*, *FGH* essendo simili (n° 318) stanno fra loro come il quadrato di *AC* al quadrato di *FH* (n° 310). Per la stessa ragione il triangolo *ACD* sta al triangolo *FHL* come lo stesso quadrato di *AC* al quadrato di *FH*; per conseguenza sarà il triangolo *ABC* al triangolo *FGH* come il triangolo *ACD* al triangolo *FHL*. Nello stesso modo si dimostra che il triangolo *ACD* sta al triangolo *FHL* come il triangolo *ADE* al triangolo *FLO*.

Ma quando si hanno più ragioni uguali la somma degli antecedenti sta a quella de' conseguenti come un antecedente qualunque al suo conseguente (n° 238), dunque la somma de' triangoli *ABC*;

ACD, *ADE*, cioè il poligono *ABCDE*, sta alla somma de' triangoli *FGH*, *FHL*, *FLO*, cioè al poligono *FGHLO*, come il triangolo *ABC* al triangolo *FGH*, ovvero come il quadrato di *AB* al quadrato di *FG*. Il che bisognava dimostrare.

321. *Corollario*. Apparisce da questa proposizione, e da quella dimostrata (n.° 315) che

La figura descritta sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo ABC (fig. 64) *è uguale alla somma delle figure simili e similmente descritte sopra i cateti.*

PROPOSIZIONE XCV — *TEOREMA*.

322. *I perimetri de' poligoni simili stanno fra loro come i lati omologhi* (fig. 66).

Dim. Siano i due poligoni simili *ABCDE*, *FGHLO*. Dico che i loro perimetri stanno come i lati omologhi *AB*, *FG*, ovvero *BC*, *GH*, ecc. Infatti, in virtù della loro similitudine si ha

$$AB : FG :: BC : GH :: CD : HL, \text{ecc.} \ldots ;$$

e per conseguenza (n.° 238) la somma di tutti gli antecedenti *AB*, *BC*, *CD*, ec., ossia il perimetro della prima figura, sta alla somma di tutt' i conseguenti *FG*, *GH* *HL*, ecc., ovvero, al perimetro della seconda figura, come uno degli antecedenti *AB* al suo conseguente *FG*. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE XCVI — *TEOREMA*.

323. *I poligoni regolari d' un medesimo numero di lati sono simili* (fig. 66).

Dim. Siano i due poligoni regolari *ABCDE*, *FGHLO* d' un medesimo numero di lati : dico che sono simili. Infatti, siccome il valore di un angolo di questi poligoni dipende dal numero de' lati (n.° 146), che è lo stesso in ambidue, gli angoli di detti poligoni saranno eguali. Ma da un' altra parte i lati sono proporzionali, perchè uguali in ciascun poligono ; dunque i poligoni proposti sono equiangoli ed hanno i lati omologhi proporzionali, perciò sono simili. Il che bisognava dimostrare.

324. *Corollario*. Si deduce da questa proposizione che

I perimetri de' poligoni regolari d' un medesimo numero di lati stanno come i loro lati, e le loro aje come i quadrati degli stessi lati.

CAPITOLO XI.

DEI QUADRATI E DEI RETTANGOLI FORMATI SULLE LINEE RETTE.

325. Partendo dalla misura del rettangolo, e dai teoremi intorno ai rapporti delle superficie, che abbiamo ricavati come conseguenze

immediate di quella misura, si potrebbero dimostrare senza figure i teoremi relativi ai quadrati ed ai rettangoli delle linee variamente divise. Ma siccome converrebbe ricorrere alle regole della moltiplicazione algebrica, così per non uscire dalla pura geometria esporremo i teoremi accennati con figure e costruzioni geometriche.

Dei quadrati e dei rettangoli delle linee variamente divise.

PROPOSIZIONE XCVII — *TEOREMA.*

326 *Se una retta* AC *è la somma delle linee* AB, BC, *il quadrato di* AC *è uguale al quadrato di* AB, *più il quadrato di* BC, *più il doppio del rettangolo compreso, fra* AB *e* BC (fig. 67).

Dim. Si costruisca sopra *AC* il quadrato *ACDE*; si prenda *AF* = *AB*, indi si conduca *FG* parallela ad *AC* e *BH* parallela ad *AE*.

Con questa costruzione il quadrato *ACDE* resta diviso in quattro parti. La prima *ABIF* è il quadrato fatto sopra *AB*, poichè *AF* = *AB*. La seconda *IGDH*, è il quadrato fatto sopra *BC*: perocchè essendo *AC* = *AE*, ed *AB* = *AF*, sarà *BC*, differenza delle linee *AC*, *AB*, uguale ad *EF* differenza delle linee *AE*, *AF*; ma in virtù delle parallele si ha *BC* = *IG*, e *EF* = *IH*, dunque la figura *IGDH* è il quadrato di *BC*. Inoltre, la terza parte *BCGI* esprime il rettangolo di *AB* in *BC*, perchè *AB* = *BI*, e l'ultima parte *EFIH* è pure uguale allo stesso rettangolo di *AB* in *BC*, perchè *FI*=*AB*, ed *EF*=*BC*. Dunque il quadrato di *AC* si compone dei quadrati di *AB*, e di *BC* e del doppio rettangolo di *AB* in *BC*; ed è perciò uguale alla somma di tutte quelle figure. Il che bisognava dimostrare.

327. *Scolio.* È facile vedere che questa proposizione potrebbe enunciarsi così:

Se una retta è divisa in due parti, il quadrato di tutta la linea è uguale ai quadrati delle parti, ed al doppio del rettangolo contenuto da esse parti.

Giova anche osservare che il quadrato della retta *AC* divisa in due parti *AB*, *BC* è uguale alla somma de'rettangoli *ABHE*, *BCDH* contenuti da tutta la linea e da ciascuna delle parti.

328. *Corollario.* È manifesto che se le rette *AB*,*BC* sono uguali i rettangoli *FH*, *BG* si cambiano in quadrati, onde il quadrato di *AC* sarà uguale al quadruplo del quadrato di *AB* o di *BC*. Dunque « se una retta è divisa in due parti uguali, il quadrato dell' intera » retta sàra uguale al quadruplo del quadrato della metà ».

PROPOSIZIONE XCVIII — *TEOREMA.*

329. *Il quadrato* ACIF *della linea retta* AC *differenza delle due linee* AB *e* BC *è uguale al quadrato di* AB *più il quadrato di* BC, *meno il doppio rettangolo di* AB *in* BC (fig. 68).

Dim. Sopra AB si descriva il quadrato $ABDE$, si prenda $AF = AC$, e si conduca CH parallela a BD, e FG parallela ad AB; finalmente si costruisca sopra EF il quadrato $EFKL$, e le rette KF, FI risulteranno per diritto, per essere tutti gli angoli in F retti.

Il rettangolo $CBDH$ è uguale al rettangolo di AB in BC, poichè $BD = AB$. Parimente il rettangolo $KIHL$ è uguale al rettangolo di AB in BC, poichè $KI = KF + FI = BC + AC = AB$, ed $IH = BC$; dunque i due rettangoli $CBDH$, $KIHL$ sono uguali al doppio rettangolo di AB in BC. Ora se da tutta la figura $ABDLKF$, composta dei quadrati di AB, e di BC, si tolgano i due rettangoli accennati, resterà il quadrato di AC, dunque questo quadrato è uguale alla somma dei quadrati di AB, e di BC, meno il doppio rettangolo di AB in BC. Il che bisognava dimostrare.

330. *Scolio.* Questa proposizione potrebbe enunciarsi ancora nel seguente modo:

Se una retta è divisa in due parti, i quadrati di tutta la linea e di una sua parte sono eguali al doppio del rettangolo di tutta la linea nella stessa parte col quadrato della rimanente parte.

PROPOSIZIONE XCIX — *TEOREMA.*

331. *Il rettangolo compreso dalla somma e dalla differenza di due rette è uguale alla differenza dei quadrati delle stesse rette* (fig. 70).

Dim. Siano AB, BC le due rette date. Si costituisca sopra AB il quadrato $ABIF$, si prenda $AE = AC$, si conduca CG parallela ad AF; ed EL parallela ad AB; indi sul prolungamento di questa retta si prenda $BK = BC$; e finalmente dal punto K si tiri KL parallela a BI che incontrerà EL nel punto L. Il rettangolo $AKLE$ avrà per base AK, cioè la somma delle due rette date AB, BC, e per altezza AE, ovvero la differenza delle stesse rette, perchè $AE = AC$. Ciò premesso, dico che il rettangolo $AELK$ è uguale al quadrato di AB meno il quadrato di BC.

Imperocchè, il rettangolo $AELK$ è composto dei due rettangoli $ABHE$, e $BHLK$: ma il rettangolo $BHLK$ è uguale al rettangolo $CDHB$, perchè hanno le basi eguali BK, BC, e la stessa altezza BH (n.° 266); ed è poi il rettangolo $CDHB$ eguale al rettangolo $EDGF$ (n.° 326), dunque il rettangolo $AELK$ è uguale alla somma de' due rettangoli $ABHE$, ed $EDGF$. Or questi due rettangoli formano tutto il quadrato $ABIF$ meno il quadrato $DHIG$, cioè formano il quadrato di AB meno il quadrato di BC; per conseguenza il rettangolo $AELK$ è uguale al quadrato di AB meno il quadrato di BC. Il che bisognava dimostrare.

* 332. *Scolio.* Se sul prolungamento di AC (fig. 71) si fosse presa $BK = AB$, cioè alla maggiore delle due rette date, il teorema avrebbe potuto ancora dimostrarsi. In fatti il rettangolo $DCKL$ ha

ha per base *CK*, somma delle due rette date *AB*, *BC*, e per altezza *CD*, differenza delle rette medesime, perchè $CD = AC$. Or essendo il rettangolo *CH* eguale al rettangolo *DF* (n° 326), sarà il rettangolo *DCKL* eguale alla somma de' due rettangoli *EABH*, *EDGF*, ovvero alla differenza de' quadrati delle rette *AB*, *BC* (*).

333. *Definizione*. Per *proiezione* di una retta terminata *AC* sopra una retta indefinita *LE* (fig. 65), s'intende la retta *ME* compresa fra i piedi delle perpendicolari abbassate dalle due estremità *A*, e *C* sulla linea *LE*.

Quindi la proiezione di *AC* sopra *BC* sarà la retta *DC*.

Dei quadrati fatti sopra i lati dei triangoli obliquangoli.

PROPOSIZIONE C — *TEOREMA*.

334. *In un triangolo ottusangolo* ABC *il quadrato del lato* AB *opposto all'angolo ottuso* ACB *è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati* AC, CB, *più il doppio del rettangolo compreso fra uno di essi* CB *e la retta* CD *interposta fra il vertice dell'angolo ottuso, e la perpendicolare AD* (fig. 72).

Dim Nel triangolo rettangolo *ABD* il quadrato di *AB* è uguale al quadrato di *AD*, più il quadrato di *DB* (n° 315); ma la retta *DB* è uguale alla somma delle due rette *DC*, *CB*, e per ciò il quadrato di *DB* è uguale al quadrato di *DC*, più il quadrato di *CB*, più il doppio rettangolo di *CB* in *CD* (n° 326); dunque il quadrato di *AB* è uguale ai quadrati di *AD*, di *DC*, di *CB*, ed al doppio rettangolo di *BC* in *CD*, ma la somma de' quadrati di *AD*, e di *CD* è uguale al quadrato di *AC* (n° 315), dunque il quadrato di *AB* equivale ai quadrati di *AC*, e di *BC* insieme col doppio rettangolo di *CB* in *CD*. Il che bisognava dimostrare.

335. *Scolio*. Questo teorema potrebbe enunciarsi in tal modo:

Nel triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è uguale alla somma de' quadrati degli altri due lati, più il doppio rettangolo contenuto da uno di questi lati e dalla proiezione dell'altro sul lato accennato.

(*) Questa proposizione si trova negli Elementi di Euclide divisa in due proposizioni differenti nel modo seguente.

1.° » Se alla retta *CK* divisa per mezzo in *B*, si aggiunga per diritto la » retta *CA*, il rettangolo di tutta la composta *AK* nell'aggiunta *CA* col » quadrato della metà *BC* eguaglia il quadrato della retta *AB* composta » della metà e dell'aggiunta (fig. 70).

2.° » Se la retta *AK* è divisa in due parti eguali in *B*, ed in due parti » disuguali in *C*, il rettangolo delle parti disuguali *AC*, *CK* col quadrato » del segmento intermedio *CB* eguaglia il quadrato della metà della retta » *AK* (fig. 71).

PROPOSIZIONE CI — *TEOREMA.*

336. *In un triangolo* ABC *il quadrato del lato* AB *opposto ad un angolo acuto* ACB *è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati* AC, CB, *meno il doppio rettangolo compreso fra uno di essi* BC, *e la retta* CD *interposta fra il vertice dell' angolo acuto, e la perpendicolare* AD (fig. 73).

Dim. La perpendicolare *AD* può cadere dentro, o fuori del triangolo *ABC.*

1 Nel triangolo rettangolo *ABD* il quadrato di *AB* è uguale al quadrato della perpendicolare *AD*, più il quadrato della retta *BD*, ch' è la differenza delle due *BC*, *CD*: per conseguenza sarà il quadrato di *AB* uguale al quadrato di *AD*, più il quadrato di *BC*. più il quadrato di *DC*, meno il doppio rettangolo di *BC* in *CD* (n° 329). Ma i quadrati di *AD*, e di *CD* presi insieme equivalgono al quadrato di *AC* (n° 315), dunque il quadrato di *AB* è uguale alla somma dei quadrati di *AC*, e di *CB*, meno il doppio rettangolo di *BC* in *CD*.

2. Se la perpendicolare *AD* cadesse sul prolungamento di *CB* fuori del triangolo *ABC*, avrebbe luogo la medesima dimostrazione ; solamente la linea *BD* sarebbe differenza delle linee *CD*, *CB*, mentre nel caso precedente era differenza delle linee *CB*, *CD*. Il che bisognava dimostrare.

337. *Scolio.* Questo teorema potrebbe enunciarsi in tal modo:

Il quadrato del lato opposto ad un angolo acuto di un triangolo è uguale alla somma de' quadrati degli altri due lati meno il doppio rettangolo contenuto da uno di questi due lati e dalla proiezione dell'altro sul lato accennato.

PROPOSIZIONE CII — *TEOREMA.*

338. *In un triangolo qualunque* ABC, *se si divida la base* BC *per metà, e si congiunga il punto di mezzo* E *col vertice* A *dell' angolo opposto, la somma dei quadrati degli altri due lati* AB, AC *è uguale a due volte il quadrato della congiungente* AE, *più due volte il quadrato della semibase* BE (fig. 74).

Dim. Si abbassi sulla base *BC* la perpendicolare *AD.*

Nel triangolo ottusangolo *ABE* il quadrato di *AB* è uguale alla somma dei quadrati di *AE*, e di *EB*, più il doppio rettangolo di *BE* in *ED*. Al contrario nel triangolo acutangolo *AEC*, il quadrato di *AC* è uguale alla somma dei quadrati di *AE*. e di *EC*, meno il doppio rettangolo di *EC* in *ED*. Ma il quadrato di *EC* è uguale al quadrato di *EB*, ed il doppio rettangolo di *BE* in *ED* è lo stesso che il doppio rettangolo di *EC* in *ED*, dunque la somma dei quadrati di *AB*, e di *AC* equivale al doppio del quadrato di *AE*, più il

doppio del quadrato di BE, poichè il doppio rettangolo aggiunto e sottratto si annulla. Il che bisognava dimostrare.

339. *Scolio* Nella fig. 74 si è supposto che la perpendicolare AD cada dentro del triangolo ABC; ma è manifesto che se cadesse fuori come nella fig. 75, il teorema avrebbe anche luogo (*).

PROPOSIZIONE CIII — *TEOREMA.*

340. *In ogni parallelogrammo* ABCD *la somma dei quadrati dei quattro lati equivale alla somma dei quadrati delle due diagonali* (fig. 45).

Dim. Imperocchè, tirando le diagonali AC, BD. esse si taglieranno scambievolmente in parti uguali nel punto O (n° 169); per conseguenza nel triangolo ABC la somma dei quadrati dei lati AB, BC sarà (n° 337) uguale a due volte il quadrato di BO, più due volte il quadrato di AO. Parimente nel triangolo ADC la somma dei quadrati dei lati CD, DA è uguale a due volte il quadrato di OD, ovvero di OB, più due volte il quadrato di AO. Laonde la somma dei quadrati dei quattro lati AB, BC, CD, AD sarà uguale a quattro volte il quadrato di BO, più quattro volte il quadrato di AO. Ma il quadruplo del quadrato di BO è uguale al quadrato di BD (n° 328), ed il quadruplo del quadrato di AO è uguale al quadrato di AC; dunque la somma dei quadrati dei lati del parallelogrammo $ABCD$ è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali. Il che bisognava dimostrare.

(*) Se in vece de' quadrati delle rette AB, AC, AE, che sono ipotenuse de' tre triangoli rettangoli ABD, ADC, ADE, si mettano i quadrati de' cateti corrispondenti, il teorema qui sopra dimostrato darà

$$\overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 = 2\,\overline{BE}^2 + 2\,\overline{ED}^2.$$

vale a dire

» Se la base di un triangolo si divida in due parti eguali, e si congiunga il » punto di mezzo col vertice dell' angolo opposto alla base, la somma de' » quadrati delle proiezioni degli altri due lati sulla base è uguale al doppio » quadrato della semibase, più il doppio quadrato della proiezione della » congiungente sulla base medesima.

Questo teorema trovasi negli Elementi di Euclide diviso in due proposizioni distinte nel modo seguente:

1.° » Se una retta BC (fig. 74) è divisa in parti eguali nel punto E, ed » in parti disuguali nel punto D, i quadrati delle parti disuguali BD, DC » sono il doppio del quadrato della metà BE, e del quadrato del segmento » intermedio ED.

2.° » Se alla retta BC (fig. 75) divisa per mezzo in E, si aggiunga per » diritto un' altra retta CD, i quadrati della composta BD, e dell' aggiunta CD sono il doppio del quadrato della metà BE, e della ED composta » della metà e dell' aggiunta.

CAPITOLO XII.

APPLICAZIONE DE' PRINCIPJ CONTENUTI NE' DUE CAPITOLI PRECEDENTI ALLA RISOLUZIONE DI ALCUNI PROBLEMI.

PROPOSIZIONE CIV — *PROBLEMA.*

341. *Dividere una linee retta in un dato numero di parti uguali o in parti proporzionali a più rette date* (fig. 58).

Sol. Sia da dividersi in primo luogo la retta *AB* in un dato numero di parti uguali, per esempio, in tre parti. Dal punto *A* si conduca una retta indefinita *AH*, la quale faccia colla retta data un angolo qualunque; indi sopra *AH* si prendano tre parti uguali *AE*, *EF*, *FG*, ad arbitrio, si congiunga il punto *B* col punto *G*, e si tirino in fine le rette *FD*, *EC* parallele a *BG*. La retta *AB* sarà divisa nelle tre parti uguali *AC*, *CD*, *DB*.

In fatti le parallele *CE*, *DF*, *BG* dividono le rette *AB*, *AG* in parti proporzionali (n° 296); e perciò essendo uguali per costruzione le rette *AE*, *EF*, *FG*, ancora le rette *AC*, *CD*, *DB* devono essere uguali.

Sia in secondo luogo da dividersi *AB* in parti proporzionali ad altre rette date, per esempio in tre parti. Si prenderanno sopra *AH* tre parti *AE*, *EF*, *FG* uguali respettivamente alle tre rette date, indi si dimostrerà come sopra che la retta *AB* sarà divisa in tre parti proporzionali alle rette date. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE CV — *PROBLEMA.*

342. *Trovare la quarta proporzionale a tre rette date* (fig: 76).

Sol. Si tirino due rette indefinite, che facciano un angolo qualunque *EAC*. Si prenda *AB* uguale alla prima della tre rette date, *BE* alla seconda, *AD* alla terza; indi si congiunga il punto *B* col punto *D*, e dal punto *E* si conduca *EC* parallela a *BD*: sarà *DC* la quarta proporzionale richiesta. Infatti (n° 293) nel triangolo *AEC* essendo *BD* parallela a *EC* si avrà *AB* : *BE* : : *AD* : *AC*. Il che bisognava fare.

343. *Scolio.* La terza proporzionale a due rette date si trova colla stessa costruzione, cioè prendendo *AB* uguale alla prima delle due rette date, *BE* alla seconda, ed *AD* uguale pure alla seconda. È manifesto che *DC* sarà la terza proporzionale cercata.

PROPOSIZIONE CVI — *PROBLEMA.*

344. *Trovare una media proporzionale fra due rette date* (fig. 77).

Sol. Sopra una medesima retta si prendano le parti *AB*, *BC* u-

guali respettivamente alle due rette date; indi si divida AC in due parti eguali nel punto O, e fatto centro in questo punto si descriva col raggio OA una mezza circonferenza. Finalmente s' innalzi sul diametro AC la perpendicolare BD, e si prolunghi finchè incontri la circonferenza in D: sarà BD la media proporzionale richiesta.

Infatti, si tirino le corde DA, DC, ed il raggio DO. Essendo $DO = OC$, e $DO = OA$ come raggi, saranno isosceli i due triangoli DOC, e DOA: per conseguenza (n° 110) sarà l'angolo $ODC = OCD$, e l'angolo $ODA = OAD$. Or questi quattro angoli presi insieme equivalgono a due angoli retti, perchè formano i tre angoli del triangolo ADC, dunque l'angolo ADC formato dagli angoli ADO, e CDO dev'essere uguale ad un angolo retto. Quindi il triangolo ADC è rettangolo; e perciò la perpendicolare DB è media proporzionale tra le due rette AB, BC (n° 312). Il che bisognava fare.

345. *Scolio.* L'angolo ADC nel semicerchio essendo retto, ed il triangolo DAC rettangolo; tutte le proprietà dimostrate (n° 311) rispetto al triangolo rettangolo si applicheranno al triangolo DAC con un semplice cangiamento di nomi, vale a dire,

1.° *La perpendicolare* DB *abbassata da un punto della circonferenza sul diametro è media proporzionale fra i due segmenti* AB, BC *del diametro medesimo.*

2.° *La corda* DA, *o* DC, *è media proporzionale fra il diametro ed il segmento adiacente alla corda medesima.*

3.° *I quadrati delle corde* DA, DC *stanno fra loro come i segmenti adiacenti* AB, BC *del diametro.*

4.° *Il quadrato di una corda* DA *sta al quadrato della perpendicolare* DB *come il diametro al segmento adiacente all'altra corda* DC.

5.° *Il quadrato del diametro sta al quadrato di una corda* DA, *o* DC *come lo stesso diametro al segmento adiacente alla corda medesima:*

6.° *Il quadrato del diametro è uguale alla somma de' quadrati delle due corde* DA, DC.

PROPOSIZIONE CVII — *PROBLEMA.*

346. *Sopra una retta data costruire un rettangolo equivalente ad un rettangolo dato* (fig. 49).

Sol. Sia EF la retta data, ed $ABCD$ il rettangolo dato. Supposto risoluto il problema sia $EFGH$ il rettangolo richiesto. Or essendo equivalenti i due rettangoli dovranno aver le basi in ragione reciproca delle altezze; perciò si avrà la proporzione

$$EF : AB :: AD : EH.$$

Quindi se si ritrovi una quarta proporzionale EH in ordine alle tre rette date EF, AB, AD, s'innalzi al punto E una perpendicolare uguale ad EH, e si compia il rettangolo $EFGH$, il problema proposto sarà risoluto. Il che bisognava fare.

347. *Scolio*. È manifesto che con la costruzione precedente si può descrivere sopra una retta data un rettangolo equivalente ad un quadrato dato: in tal caso la retta EF sarà terza proporzionale alle due rette EF, ed AB, che sarà il lato del quadrato.

PROPOSIZIONE CVIII — *PROBLEMA*.

348. *Costruire un quadrato equivalente ad un parallelogrammo o ad un triangolo dato* (fig. 51).

Sol. Sieno BC, ed AD la base e l'altezza del parallelogrammo o del triangolo.

1. Si trovi una media proporzionale M fra la base BC e l'altezza AD, sarà M il lato del quadrato equivalente al parallelogrammo $ABCE$. Infatti dalla proporzione $BC : M :: M : AD$ si deduce (n° 218) che il prodotto di BC in AD è uguale al quadrato di M: ma quel prodotto è la misura del parallelogrammo, dunque il quadrato fatto sopra M è equivalente al parallelogrammo medesimo.

2. Si trovi una media proporzionale N fra la base BC e la metà dell'altezza AD, sarà N il lato del quadrato equivalente al triangolo ABC. Perocchè essendo $BC : N :: N : \frac{1}{2} AD$, sarà il prodotto della base BC per la metà dell'altezza AD, ossia (n° 275) l'aja del triangolo, uguale all'aja del quadrato. Il che bisognava fare.

349. *Scolio*. Poichè ogni poligono si può trasformare in un triangolo equivalente (n°290), ed ogni triangolo in un quadrato equivalente, è manifesto che è sempre possibile di descrivere un quadrato equivalente ad un poligono dato. In questa trasformazione consiste la *quadratura* delle figure.

PROPOSIZIONE CIX — *PROBLEMA*.

350. *Costruire un quadrato equivalente alla somma o alla differenza di due quadrati* (fig. 78).

Sol. Si tirino due rette indefinite che facciano tra loro l'angolo retto A, indi sopra queste rette si prendano le parti AC, AB respettivamente uguali ai lati dei quadrati dati, e si congiunga il punto B col punto C, la retta BC sarà il lato del quadrato equivalente alla somma dei quadrati dati; poichè BC è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC, di cui i cateti sono AB, ed AC (n° 315).

Dovendosi formare un quadrato equivalente alla differenza di due quadrati, si prenda AC uguale al lato del quadrato minore, indi fatto centro in C e con un raggio CB uguale al lato del quadrato maggiore si descriva un arco che tagli la retta indefinita AB in un punto B, sarà AB il lato del quadrato richiesto. Infatti il quadrato del cateto AB è uguale al quadrato del ipotenusa BC meno il quadrato dell'altro cateto AC (n° 315). Il che bisognava fare.

351. *Scolio*. È manifesto che colla costruzione fatta più sopra si

potrà costruire un quadrato uguale alla somma di quanti quadrati si vorrà; dappoichè siccome a due se ne può sostituire uno, così a tre se ne potranno sostituire due, e quindi un solo a tutti tre. Nello stesso modo a quattro quadrati si potrà sostituire un solo, e così in progresso.

PROPOSIZIONE CX — *PROBLEMA.*

352. *Sopra una retta data descrivere un poligono simile ad un poligono dato* (fig. 66).

Sol. Sia *ABCDE* il poligono dato, ed *OL* la retta data, che si considera come lato omologo al lato *ED*.

Si decomponga il poligono in triangoli per mezzo delle diagonali *AC*, *AD*; indi si faccia l'angolo *FLO* uguale all'angolo *ADE*, e l'angolo *FOL* uguale all'angolo *AED*, il triangolo *FOL* sarà simile al triangolo *AED* (n° 302). Colla stessa costruzione si descriverà sopra *FL* il triangolo *FLH* simile al triangolo *ACD*, e sopra *FH* il triangolo *FGH* simile al triangolo *ABC*. È evidente che il poligono *FGHLO* sarà il poligono richiesto (n° 319). Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE CXI — *PROBLEMA.*

353. *Essendo dati due poligoni simili, costruire un altro poligono simile ai due primi, e che sia uguale alla loro somma, o alla loro differenza* (fig. 80).

Sol. Siano *P*, e *Q* i due poligoni dati. Supponendo il problema risoluto, e rappresentando con *R* il poligono richiesto, in virtù della similitudine de'tre poligoni si avrà (n° 320)

$$R : P : Q : : \overline{GO}^2 : \overline{HI}^2 : \overline{KL}^2.$$

Ma dev' essere il poligono *R* eguale alla somma, o alla differenza de'due poligoni *P*, e *Q*, dunque in virtù della proporzione accenata anche il quadrato *GO* dovrà esser eguale alla somma o alla differenza de'due quadrati *HI*, e *KL* (n° 236). Quindi se si descriva un quadrato eguale alla somma, o alla differenza de'quadrati di due lati omologhi *HI*, *KL* de'poligoni dati *P*, *Q*, e sul lato *GO* del quadrato accennato si costruisca un poligono *R* simile ad uno de' poligoni dati, il problema proposto sarà risoluto. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE CXII — *PROBLEMA.*

354. *Costruire un poligono simile al poligono* P, *ed equivalente al poligono* Q (fig. 81).

Sol. Sia *R* il poligono richiesto. Dovendo essere simili i due poligoni *P*, e *R* staranno fra loro come i quadrati de' lati omologhi *AB*, *CD* (n° 320); ma dev' esser $R = Q$, perciò si avrà la proporzione

$$P : Q : : \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$$

Quindi sarebbe conosciuto il lato CD del poligono richiesto R, se il rapporto de' poligoni dati P, Q potesse esprimersi per mezzo dei loro lati, ma non potendo ciò farsi, perchè i poligoni accennati non sono simili, si trasformerà il poligono P, in un quadrato equivalente, di cui M sia un lato (n° 349), ed il poligono Q pure in un quadrato equivalente, di cui N sia un lato, allora sarà

$$P : Q :: M^2 : N^2.$$

Paragonando questa proporzione con la precedente risulterà

$$M^2 : N^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2.$$

Ovvero (n° 245) $M : N :: AB : CD$. Dunque il problema proposto si riduce a trovare una quarta proporzionale CD in ordine alle tre rette M, N, AB, ed a descrivere sopra CD omologa ad BA un poligono R simile al poligono dato P, allora R sarà ancora equivalente a Q. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE CXIII — *PROBLEMA.*

355. *Costruire un poligono simile ad un poligono dato, e che stia a questo poligono nella data ragione di* M *a* N (fig. 80).

Sol. Sia Q il poligono dato, e P il poligono richiesto. Per le condizioni del problema si avrà $P : Q :: M : N$.

Ma i poligoni simili stanno fra loro come i quadrati de'lati omologhi; per conseguenza sarà $P : Q :: \overline{HI}^2 : \overline{KL}^2$. Paragonando questa proporzione con la precedente risulterà

$$\overline{HI}^2 : \overline{KL}^2 :; M : N$$

Quindi il problema proposto si riduce a descrivere un quadrato HI che stia al quadrato KL come $M : N$, problema che risolveremo nella proposizione seguente. Se dunque si descriva sopra il lato HI omologo a KL un poligono P simile al poligono dato Q, il problema proposto sarà risoluto. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE CXIV — *PROBLEMA.*

356. *Costruire un quadrato che stia ad un quadrato dato nella data ragione di* M *a* N (fig. 79).

Sol. Essendo nel semicerchio ADB i quadrati delle corde DA, DB come i segmenti AC, CB del diametro (n° 345), sarà facile risolvere il problema proposto.

Si faccia $AC = M$, e $CB = N$, indi sopra AB come diametro si descriva il semicerchio ABD; al punto C s' innalzi sul diametro la perpendicolare CD, e si tirino le corde DA, DB. È manifesto che se la corda DB fosse uguale al lato Q del quadrato dato, l' altra corda DA sarebbe il lato del quadrato richiesto; nel caso contrario supponiamo $DB > Q$, allora si prenderà $DO = Q$, e dal punto O si condurrà la retta OS parallela al diametro AB, si avrà la proporzione (n° 294) $DA : DB :: DS : DO$, ovvero $\overline{DA}^2 : \overline{DB}^2 :: \overline{DS}^2 : \overline{DO}^2$.

Ma il quadrato di DA sta al quadrato di DB come M a N, dunque sarà $\overline{DS}^2 : \overline{DO}^2 :: M : N$, e però DS è il lato del quadrato richiesto.

Finalment se $DB \diagdown Q$, si prenderà $DE = Q$, e la retta EF parallela al diametro AB darà DF, che sarà il lato del quadrato cercato. Il che bisognava fare.

357. *Scolio.* È facile vedere che per trovare due quadrati, di cui il rapporto sia eguale a quello di due rette M, e N, basta prendere $AC = M$, $CB = N$, descrivere sopra AB il semicerchio ADB, innalzare sul diametro AB la perpendicolare CD, e tirare in fine le corde DA, DB, che saranno i lati de'quadrati richiesti.

PROPOSIZIONE CXV — *PROBLEMA.*

358. *Trovare due linee il cui rapporto sia uguale al rapporto di due quadrati dati* (fig. 64).

Sol. Si pongano ad angoli retti i lati AB, AC, dei due quadrati dati, si congiunga il punto B col punto C, e si abbassi dal vertice A dell'angolo retto la perpendicolare AD sopra l'ipotenusa BC: i due segmenti BD, DC di questa ipotenusa saranno le linee richieste.

Infatti, si è dimostrato (n° 304) che nel triangolo rettangolo i quadrati dei cateti stanno fra loro come i segmenti adiacenti dell'ipotenusa. Il che bisognava fare.

359. *Scolio I.* Il problema precedente si potrebbe ancora risolvere in un altro modo, cioè con trovare la terza proporzionale, che chiameremo X, in ordine ai lati A. B dei due quadrati dati (fig. 82).

In fatti essendo le rette A, B, X continuamente proporzionali, la prima A starà alla terza X come il quadrato di A al quadrato di B (n° 248).

360. *Scolio II.* Potendosi un poligono qualunque trasformare in un quadrato equivalente, si comprende facilmente che con la costruzione sopraddetta potrebbero trovarsi due linee il cui rapporto fosse uguale al rapporto di due poligoni qualunque (*).

CAPITOLO XIII.

DELLE PROPRIETA' DEL CERCHIO.

361. Il cerchio considerato in se stesso non presenta altra proprietà se non quella inerente alla sua definizione; proprietà la quale

(*) La riduzione del rapporto di due poligoni qualunque a quello di due linee è uno dei più belli risultamenti, che si possono ottenere dalla geometria. Ma questo risultamento resterebbe nel campo delle astrazioni se mancasse il mezzo di esprimere il rapporto di due linee in numeri o esattamente o per approssimazione, secondo che le dette linee sono commensurabili, o incommensurabili. Ciò merita di essere osservato; dappoichè la geometria deve servire alle applicazioni, e non già ad alimentare una sterile contemplazione.

offre il mezzo di determinare con la legge di continuità una serie di punti equidistanti da un punto dato, e ciò è bastato per la costruzione di tutti i problemi precedentemente risoluti. Ma se il cerchio si considera nel suo incontro colla linea retta, si vedranno nascere proprietà importantissime, che vengeno ad esso comunicate dalle figure rettilinee risultanti dalle sue intersezioni con linee rette variamente situate. Lo studio delle proprietà del cerchio sotto questo aspetto merita la più grande attenzione; dappoichè la linea retta è il termine di paragone delle linee curve senza del quale non si potrebbero conoscere le affezioni di qualsisia curva.

362. Negli elementi di Geometria si espongano soltanto le proprietà più comuni del cerchio. Di queste andiamo ora ad occuparci; ma prima di esporle convien premettere le due seguenti definizioni:

Definizione I. Segmento di cerchio è la figura compresa fra l'arco e la corda.

Definizione II. *Settore* è la figura compresa fra un arco e i due raggi condotti all'estremità di esso.

363. È facile vedere che ad una medesima corda *AB* (fig. 83) corrispondono due archi *ADB*, *AECB*, e per conseguenza due segmenti; ma nelle seguenti proposizioni s'intende sempre parlare del più piccolo, purchè non si avverta il contrario.

PROPOSIZIONE CXVI — *TEOREMA*.

364. *Una linea retta non può incontrare la circonferenza di un cerchio in più di due punti* (fig. 83).

Dim. Imperocchè se una linea retta potesse incontrare la circonferenza in tre punti *A*, *B*, *C*, tirando i raggi *OA*, *OB*. *OC*, vi sarebbero tre rette uguali condotte da uno stesso punto *O* sopra una medesima linea retta *ABC*; il che è impossibile (n° 121). Dunque una linea retta non può incontrare la circonferenza in più di due punti. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXVII — *TEOREMA*.

365. *Ogni diametro divide il cerchio, e la sua circonferenza in due parti uguali* (fig. 83).

Dim. Sia *AC* un diametro qualunque. Si applichi la figura mistilinea *AEC* sopra la figura *ADBC*, conservando la base comune *AC*; è manifesto che la linea curva *AEC* dovrà coincidere con la linea curva *ADBC*, altrimenti o nell'una o nell'altra vi sarebbero punti non ugualmente distanti dal centro *O*, il che non può essere. Dunque il diametro divide il cerchio, e la sua circonferenza in due parti uguali. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXVIII — *TEOREMA.*

366. *Ogni corda è minore del diametro* (fig. 83),

Dim. Sia *AB* una corda qualunque; per una delle sue estremità *A* si tiri il diametro *AC*, poi si conduca il raggio *OB*. Nel triangolo *AOB* il lato *AB* è minore della somma degli altri due *OA*, *OB*, ma la somma di questi due raggi è uguale al diametro *AC*; dunque ogni corda è minore del diametro. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXIX — *TEOREMA.*

367. *In un medesimo cerchio, o in cerchi uguali, gli archi uguali sono sottesi da corde uguali; reciprocamente le corde uguali sottendono archi uguali* (fig. 84).

Dim. Sia l'arco *AMD* uguale all'arco *ENG*; dico che la corda *AD* sarà uguale alla corda *EG*.

Perocchè essendo uguali i due cerchi, soprapponendo il diametro *AB* al diametro *EF*, la semicirconferenza *AMDB* coinciderà colla semicirconferenza *ENGF*, e l'arco *AMD* con l'arco *ENG*, ed il punto *D* col punto *G*; onde la corda *AD* sarà uguale alla corda *EG*.

Reciprocamente se la corda *AD* è uguale ad *EG*, sara l'arco *AMD* uguale all'arco *ENG*. Imperocchè tirando i raggi *CD*, *OG*, i due triangoli *ACD*, *EOG* avranno i tre lati rispettivamente uguali, e per conseguenza saranno uguali. Laonde applicando il semicerchio *ADB* sul semicerchio *EGF*, l'angolo *ACD* caderà sul suo uguale *EOG*; e però l'arco *AMD* coinciderà evidentemente con l'arco *ENG*. Il che bisegnava dimostrare.

368. *Corollario.* La dimostrazione precedentente fa conoscere chiaramente che, *quando due archi d'un medesimo cerchio, o di cerchi uguali sono uguali*;

1°. *Gli angoli ai centri ACD, EOG sono uguali, e reciprocamente*;

2°. *i settori AMDC, ENGO, ed i segmenti AMDm, ENGn, sono anche uguali.*

PROPOSIZIONE CXX — *TEOREMA.*

369. *In un medesimo cerchio, o in cerchi uguali, il maggiore di due archi è sotteso da una corda maggiore, e reciprocamente, purchè i detti archi sieno minori di una semicirconferenza* (fig. 84).

Dim. Sia l'arco *AH* maggiore dell'arco *AD*; dico che la corda *AH* è maggiore della corda *AD*. Infatti tirando i raggi *CD*, *CH*, si avranno i due triangoli *ACH*, *ACD*, ne'quali i due lati *AC*, *CH* sono uguali a'due lati *AC*, *CD*; ma l'angolo *ACH* è maggiore dell'angolo *ACD*; perciò (n° 90) sarà il terzo lato *AH* maggiore del terzo lato *AD*.

Reciprocamente, se la corda AH è maggiore della corda AD, si conchiuderà per mezzo degli stessi triangoli ACH, ACD che l'angolo ACH è maggiore dell'angolo ACD (n° 91) ; e per conseguenza sarà l'arco AH maggiore dell'arco AD.

370. *Scolio.* Si è supposto che gli archi dati fossero minori della semicirconferenza; poichè è manifesto che se fossero maggiori avrebbe luogo la proprietà contraria.

PROPOSIZIONE CXXI — *TEOREMA.*

371. *Il raggio perpendicolare ad una corda divide tanto questa corda, quanto l' arco sotteso in due parti uguali* (fig. 85).

Dim. Sia il raggio CG perpendicolare alla corda AB, e si conducano i raggi CA, CB, come pure le corde AG, BG.

Essendo retti gli angoli formati intorno al punto D, i triangoli ADC, DCB, ADG, BDG saranno rettangoli. Ora ne' due primi il cateto CD è comune, e la ipotenusa $CA = CB$ come raggi, dunque l' altro cateto AD sarà uguale a DB (n° 315); e però la corda AB è divisa in due parti uguali nel punto D. Parimente negli altri due triangoli essendo il cateto $AD = DB$, ed il cateto DG comune, sarà la ipotenusa $AG = GB$, ossia la corda AG uguale alla corda GB; ma corde uguali sottendono archi uguali (n° 367), dunque l' arco $AG = GB$ e per conseguenza l' arco AGB rimane diviso per metà nel punto G. Il che bisognava dimostrare.

372. *Scolio.* Dalla dimostrazione precedente risulta manifesto che *il centro, il punto di mezzo d' un arco ; ed il punto di mezzo della sua corda si trovano sopra una medesima linea retta perpendicolare ad essa corda.* Ma, bastano due punti per determinare la posizione di una linea retta; dunque ogni linea retta che passa per due dei tre punti accennati passerà necessariamente anche pel terzo; e sarà perpendicolare alla corda,

* 373. *Corollario.* Due corde AB, DC (fig.95) che non passano pel centro del cerchio non possono segarsi per mezzo ; poichè se ambedue fossero divise in due parti eguali nel punto O, la retta che congiunge il centro col punto O d'intersezione sarebbe perpendicolare alle due corde ; ed allora dal punto O si potrebbero innalzare due perpendicolari alla retta mentovata; il che è assurdo (n° 57).

PROPOSIZIONE CXXII — *PROBLEMA.*

374. *Dividere un arco in due parti eguali* (fig. 21).

Sol. Sia BD l' arco dato. Si tiri la corda BD, la quale si divida in due parti eguali nel punto C; indi da questo punto s' innalzi sulla corda accennata la perpendicolare CA, che si prolunghi fino all' incontro dell'arco BD, il punto d' incontro O sarà il punto di mezzo dell' arco in virtù della proposizione precedente. Il che bisognava fare.

375. *Scolio.* È manifesto che dividendo con la costruzione indicata ciascuna metà dell' arco *BD* in due parti eguali, risulterà tutto l' arco diviso in 4 parti eguali, e si vede subito come potrebbe dividersi in 8, in 16, in 32, ecc. parti eguali.

PROPOSIZIONE CXXIII — *TEOREMA.*

376. *Due corde eguali sono ugualmente distanti dal centro, e di due corde disuguali la minore è la più distante dal centro* (fig.86).

Dim. 1.° Sieno le corde *AB*, *DE* uguali; si abbassino dal centro le perpendicolari *CF*, *CG*, e si conducano i raggi *CA*. *CD*.

Ne' triangoli rettangoli *CAF*, *DCG*, le ipotenuse *CA*, *CD* sono uguali come raggi di un medesimo cerchio: parimente i cateti *AF*, *DG* sono uguali come metà delle corde uguali *AB*, *DE* (n° 371); dunque gli altri due cateti *CF*, *CG* saranno uguali (n° 315), e però le corde uguali *AB*, *DE* sono equidistanti dal centro.

2.° Sia ora la corda *AH* maggiore della corda *DE*; dovrà essere l' arco *ANH* maggiore dell' arco *DME* (n° 369): si prenda dunque sull' arco *ANH* la parte *ANB* = *DME*, si tiri la corda *AB*, e si abbassino le perpendicolari *CF*, *CI* sulle corde *AB*, *AH*.

La perpendicolare *CI* è minore dell' obliqua *CO* (n° 119), ed a più forte ragione sarà minore della perpendicolare *CF*; ma questa è uguale a *CG*, dunque sarà *CI* minore di *CG*; e per conseguenza di due corde disuguali la minore è la più distante dal centro. Il che bisognava dimostrare.

Della misura degli angoli.

377. Analogamente a quanto abbiam detto nel § 368 per un caso particolare, si chiama in generale *angolo al centro* ogni angolo che ha il vertice nel centro di un cerchio, ed è perciò formato da due raggi. Si dirà poi *angolo iscritto* quello il cui vertice è alla circonferenza ed è formato da due corde. Passiamo ad occuparci della misura di queste due specie di angoli.

PROPOSIZIONE CXXIV — *TEOREMA.*

378. *In un medesimo cerchio, o in cerchi uguali, gli angoli al centro stanno fra loro come gli archi compresi fra i loro lati* (fig. 87).

Dim. Siano gli angoli al centro *ACB*, *ACD*; dico che stanno fra loro come gli archi *AB*, *AD*.

Imperocchè, supponendo primieramente che gli archi sieno commensurabili, e che la loro comune misura *K* portata ripetutamente su gli archi *AB*, *AD* sia contenuta *m* volte nel primo ed *n* volte nel secondo, è manifesto (n° 368) che anche l'angolo *ACB* rimarrà

diviso in m parti uguali, e l'angolo ACD in n parti uguali, onde l'angolo ACB starà all'angolo ACD come l'arco AB all'arco AD.

Che se poi gli archi AB, AD fossero incommensurabili fra loro, la proposizione precedente sussisterebbe in egual modo. Infatti si faccia l'angolo ACD' uguale all'angolo ACD, e si supponga che la ragione dei due angoli ACB, ACD' in luogo di equivalere a quella degli archi AB, AD' equivalga a quella degli archi AB, AO, essendo AO maggiore di AD'. Qualunque differenza passi fra AO, ed AD', è chiaro che si potrà sempre dividere l'arco AB continuamente per metà fino ad avere parti così piccole che una almeno delle divisioni cada in qualche punto I fra D' ed O. In tal caso condotto il raggio CI, gli angoli ACB, ACI, e gli archi compresi AB, AI saranno rispettivamente commensurabili, onde si potrà stabilire la proporzione

$$ACB : ACI :: AB : AI.$$

Ma per ipotesi si ha

$$ACB : ACD' :: AB : AO,$$

dunque essendo in queste due proporzioni gli antecedenti uguali, si avrebbe (n° 234) fra i conseguenti la proporzione

$$ACI : ACD' :: AI : AO,$$

la quale è insussistente, poichè l'antecedente ACI è maggiore del conseguente ACD', mentre l'altro antecedente AI è minore del conseguente AO. Nello stesso modo si ragionerebbe se l'arco AO si supponesse minore dell'arco AD'; dunque dovrà essergli uguale, e però in tutti i casi gli angoli al centro di cerchi uguali stanno come gli archi compresi fra i loro lati. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXXV — *TEOREMA*.

379. *L'angolo al centro ha per misura l'arco compreso fra i suoi lati* (fig: 87).

Dim. Dalle nozioni generali date nel (n° 250) intorno alla misura delle quantità si desume che per misurare un angolo qualunque basta trovare il suo rapporto ad un angolo conosciuto preso per unità di misura; e siccome l'angolo retto è invariabile, così esso è stato prescelto per unità di misura degli angoli, onde volendosi misurare l'angolo al centro ACD, la quistione si riduce a trovare il suo rapporto coll'angolo retto. Ma da un'altra parte l'arco di cerchio compreso fra i lati d'un angolo retto, che ha il vertice al centro d'un cerchio, essendo la quarta parte della circonferenza, o un *quadrante*, si avrà pel teorema precedente.

Angolo ACD : *Angolo Retto* :: *Arco* AD : *Quadrante*:

dalla quale proporzione si deduce che il numero, da cui viene espresso il rapporto dell'arco AD al quadrante, esprime ancora il rapporto dell'angolo ACD all'angolo retto; e perciò si dice che l'angolo al

centro ha per misura l'arco compreso fra i suoi lati. Il che bisognava dimostrare.

380. *Scolio.* Da ciò che precede apparisce chiaramente che quantunque la misura degli angoli per mezzo degli archi di cerchio sia in certo modo indiretta, pure è facile ottenere dagli archi la misura diretta ed assoluta. Infatti se si paragona l'arco che serve di misura ad un angolo dato col quadrante, si avrà il rapporto dell'angolo accennato all'angolo retto; vale a dire si avrà la misura assoluta dell' angolo dato. È stata preferita la misura indiretta alla misura assoluta, perchè la prima riesce più comoda nella pratica.

PROPOSIZIONE CXXVI.— *TEOREMA.*

381. *L'angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati* (fig. 88.).

Dim. Sia l'angolo iscritto *BAD*; dico che avrà per misura la metà dell'arco *BD* compreso fra i suoi lati.

Supponiamo in primo luogo che il centro *O* del cerchio sia situato sopra uno de'lati *AD*, e si conduca il raggio *OB*. L'angolo *BOD*, esterno al triangolo *BAO*, è uguale alla somma dei due interni opposti *OAB*, *ABO* (n° 107): ma il triangolo *ABO* essendo isoscele si ha l'angolo *OAB* uguale all'angolo *ABO*: dunque l'angolo *BOD* è doppio dell'angolo *BAD*. Ora l'angolo *BOD* come angolo al centro ha per misura l'arco *BD*; dunque l'angolo *BAD* avrà per misura la metà dell'arco *BD*.

Supponiamo in secondo luogo che il centro cada dentro l'angolo *BAD* (fig. 89): si tirino il diametro *AE*, ed i raggi *OB*, *OD*. Per la dimostrazione precedente sarà l'angolo *BOE* doppio dell'angolo *BAO*, e l'angolo *DOE* doppio dell'angolo *DAO*; per conseguenza l'angolo al centro *BOD* sarà doppio dell'angolo iscritto *BAD*. Laonde anche in questo caso l'angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.

Finalmente supponiamo che il centro *O* cada fuori dell' angolo *BAD* (fig. 90): si tiri il diametro *AE*. L'angolo *BAE* ha per misura la metà dell'arco *BE*; parimente l'angolo *DAE* ha per misura la metà dell'arco *DE*; dunque l'angolo *BAD*; che è la differenza dei due angoli accennati, avrà per misura la metà dell'arco *BD*, differenza degli archi *BE*, *DE*. Quindi in tutti i casi l'angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati. Il che bisognava dimostrare.

382. *Corallario I.* Gli angoli *AMB*, *ANB* iscritti nel medesimo segmento *AMNB* (fig. 91) sono uguali, perchè tutti hanno per misura la metà di un medesimo arco *ACB*.

II. Ogni angolo *ABC* (fig. 83) iscritto nel semicerchio è retto; stantechè ha per misura la metà della semicirconferenza *AEC*, ossia un quadrante. Questa importante verità è stata già dimostrata (n° 344).

III. Ogni angolo *AMB* (fig. 91) iscritto in un segmento maggiore del semicerchio è acuto, avendo esso per misura la metà dell' arco *ACB* minore della semicirconferenza,

Al contrario ogni angolo *ACB* iscritto in un segmento minore del semicerchio è ottuso, perchè ha per misura la metà dell'arco *AMB* maggiore della semicirconferenza.

IV. Gli angoli opposti *ANB*, ed *ACB* (fig. 91) di un quadrilatero, di cui i vertici trovansi allogati sulla circonferenza, sono presi insieme uguali a due retti; perocchè la somma dei due archi che misurano questi angoli è uguale alla semicirconferenza.

* *V.* Ogni angolo eccentrico *BOC* (fig. 95) ha per misura la semisomma degli archi *AD*, *BC* compresi fra i suoi lati, perchè essendo esterno del triangolo *OBD* uguaglia la somma degli angoli *B*, e *D* i quali hanno per misura le metà degli archi *AD*, *BC*.

Inoltre ogni angolo *BOC* (fig. 96) il cui vertice è fuori del cerchio, ha per misura la semidifferenza degli archi *BC*.*AD* compresi fra i suoi lati; perocchè l' angolo *BOC* è differenza fra l' esterno *BAC*, e l'interno *ACO* del triangolo *AOC*, e gli angoli *BAC*, *ACO* sono misurati dalle metà degli archi *BC*, *AD*.

VI. L' angolo al centro è doppio dell'angolo che ha il vertice alla circonferenza, e che poggia sullo stesso arco.

Delle tangenti, e delle secanti del cerchio.

383. *Definizione I.* Una linea retta che ha un solo punto di comune colla circonferenza del cerchio dicesi *tangente*; e questo punto comune chiamasi *punto di contatto.*

384. *Definizione II.* Ogni retta che taglia la circonferenza del cerchio, e che è prolungata al di fuori, dicesi *secante.*

PROPOSIZIONE CXXVII — *TEOREMA.*

385. *La perpendicolare innalzata da un punto della circonferenza del cerchio sul raggio che passa per questo punto, è una tangente del cerchio: reciprocamente ogni tangente è perpendicolare al raggio condotto al punto di contatto* (fig. 92).

Dim. Sia *BC* perpendicolare al raggio *AO*; dico che sarà tangente del cerchio *EAD*. Imperocchè l' obliqua *OB* condotta ad arbitrio dal centro sopra *BC* è maggiore della perpendicolare *OA*, o della sua uguale *OD*; e però il punto *B* è fuori del cerchio, e la retta *BC* non avendo di comune colla circonferenza che il solo punto *A* sarà tangente del cerchio medesimo.

Reciprocamente, se *BC* tocca la circonferenza nel punto *A*, qualunque retta *OB* condotta dal centro *O* sopra *BC* avrà una parte *DB* fuori del cerchio, eccettuato soltanto il raggio *OA*; per conseguenza la retta *OA* sarà la più corta di tutte le linee che dallo stes-

so punto O si possono condurre ad una medesima retta BC; e però sarà perpendicolare a BC (n° 119). Il che bisognava dimostrare.

386. *Corollario.* La retta AB essendo la sola perpendicolare che si possa innalzare sul raggio AO dal punto A, ne segue che per un dato punto della circonferenza non si può condurre che una sola tangente.

PROPOSIZIONE CXXVIII — *TEOREMA.*

387. *L' angolo formato da una tangente e da una corda ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati* (fig. 93).

Dim. Al punto di contatto A si conduca il diametro AD. L'angolo BAD essendo retto (n° 385) ha per misura la metà della semicirconferenza ACD: parimente l'angolo iscritto CAD ha per misura la metà dell'arco CD, dunque l'angolo BAC, formato dalla tangente BA e dalla corda AC, che è la differenza de'due angoli BAD, CAD, avrà per misura la metà dell'arco AC; differenza degli archi ACD, e CD.

Nello stesso modo si dimostra che l'angolo EAC, che è la somma degli angoli EAD, CAD, ha per misura la metà dell'arco $ANDC$. Dunque l'angolo formato da una tangente e da una corda è misurato dalla metà dell'arco compreso fra i suoi lati. Il che bisognava dimostrare.

388. *Scolio.* Siccome l'angolo iscritto nel segmento ANC ha per misura la metà dell'arco AC, e similmente l'angolo iscritto nel segmento AC ha per misura la metà dell' arco ANC, ne segue che l'*angolo formato da una tangente e da una corda è uguale all' angolo iscritto nel segmento alterno del cerchio*:

PROPOSIZIONE CXXIX — *TEOREMA.*

389. *Gli archi intercetti in un medesimo cerchio, fra due secanti parallele, o fra una tangente ed una secante parallele, sono uguali* (fig. 94).

Dim. Sieno le secanti BC, DE, e la tangente FG, e si conduca il raggio OA. Essendo OA perpendicolare ad FG, lo sarà ancora alle secanti BC, DE (n° 76); laonde (n° 371) dividerà in due parti uguali gli archi BAC, e DAE. Per conseguenza se dagli archi AB, ed AC, uguali come metà dell' arco BAC, si tolgono gli archi AD, ed AE, uguali come metà dell' arco DAE, resterà l' arco BD uguale all' arco CE; il che prova la prima parte del teorema: l' uguaglianza degli archi AB ed AC prova la seconda. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXXX — *TEOREMA.*

390. *Le parti di due corde, che si tagliano in un cerchio, sono reciprocamente proporzionali* (fig. 95).

Dim. Le corde AB, CD si taglino nel punto O; dico che si avrà

$$AO : DO :: CO : OB.$$

Imperocchè, conducendo AC e BD si hanno i triangoli ACO, BOD, ne' quali gli angoli in O sono uguali come opposti al vertice, e l'angolo A è uguale all' angolo D, perchè iscritti in un medesimo segmento (n° 382); dunque questi triangoli sono simili (n° 302), ed i lati omologhi danno la proporzione

$$AO : DO :: CO : OB.$$

Il che bisognava dimostrare.

391. *Corollario.* Poichè in ogni proporzione il prodotto dei termini estremi è uguale a quello dei medj (n° 217), si avrà

$$AO \times OB = DO \times OC$$

valo a dire che *se due corde si tagliano, il rettangolo compreso fra le due parti dell' una è equivalente al rettangolo compreso fra le due parti dell altra.*

PROPOSIZIONE CXXXI — *TEOREMA.*

392. *Due secanti che partono da un punto preso fuori del cerchio, e terminano alla parte concava della circonferenza, sono reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne* (fig. 96).

Dim. Sieno le due secanti OB, OC condotte dal punto O; dico che si avrà

$$OB : OC :: OD : OA.$$

Infatti tirando AC, e BD, i triangoli OAC, OBD hanno l' angolo O comune, e gli angoli B e C uguali come iscritti nello stesso segmento $ABCD$ (n° 382); dunque questi triangoli sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione

$$OB : OC :: OD : OA.$$

Il che bisognava dimostrare.

393. *Corollario.* Dalla precedente proporzione si deduce che

$$OB \times OA = OC \times OD;$$

cioè i rettangoli di due secanti nelle loro parti esterne sono equivalenti.

394. *Scolio.* Le due proposizioni precedenti possono essere riunite in una sola, che si enuncia così : *se due secanti s' incontrano dentro o fuori del cerchio, le quattro parti di esse, che sono comprese fra il punto d' incontro e la circonferenza, sono reciprocamente proporzionali.*

PROPOSIZIONE CXXXII — *TEOREMA.*

395. *Se da un punto preso fuori del cerchio si conduca una tan-*

gente, ed una secante, la tangente sarà media proporzionale fra la secante e la sua parte esterna (fig. 97).

Dim. Dal punto O si conduca la tangente OA, e la secante OC; dico che si avrà

$$OC : OA :: OA : OD.$$

Imperocchè, tirando le corde AD, AC risulteranno i triangoli OAD, OAC, ne' quali l' angolo O è comune ad ambidue, e l' angolo OAD formato da una tangente e da una corda è uguale all'angolo C iscritto nel segmento alterno ACD; dunque i due triangoli sono simili, e si ha la proporzione

$$OC : OA :: OA : OD.$$

Il che bisognava dimostrare.

396. *Corollario.* Poichè in una proporzione continua (n° 218), il prodotto de' termini estremi è uguale al quadrato del termine medio, si avrà

$$OC \times OD = \overline{OA}^2,$$

vale a dire che *il quadrato della tangente è equivalente al rettangolo della secante nella sua parte esterna.* E si osservi che questa proposizione è un caso particolare della precedente, nel quale una delle secanti, divenendo tangente, si confonde con la sua parte esterna, ed il rettangolo si cambia in quadrato.

Delle intersezioni e de' contatti de' cerchi.

397. *Definizione I.* Due circonferenze *s'intersegano* quando una parte di ciascuna di esse entra nell'aja del cerchio terminato dall'altra.

398. *Definizione II.* Due circonferenze si *toccano* quando hanno un solo punto di comune, il quale si chiama *punto di contatto, o contatto.*

PROPOSIZIONE CXXXIII — *TEOREMA.*

399. *Per tre punti non situati in linea retta può sempre passare una circonferenza di cerchio, e non può passarne che una sola* (fig. 98.)

Dim. Siano A, B, C, i tre punti dati. Si uniscano con le rette AB, BC, le quali si dividano per metà ne' punti D, F, e s'innalzino su di esse le perpendicolari DE, FG, che s'incontreranno in un punto O. Infatti, se si congiunga il punto D col punto F, la somma degli angoli interni da una stessa parte EDF, GFD è minore di due retti, perchè l'angolo EDF è parte dell'angolo retto EDB, e l'angolo GFD è parte dell'angolo retto GFB.

Si uniscano le rette OC, OB, OA; ed essendo $AD = DB$, le oblique OA, OB saranno eguali (n° 119), e similmente sarà $OB = OC$.

Quindi la circonferenza descritta col centro in O e col raggio OA passerà per i tre punti dati A, B, C; nè per gli stessi punti potrà passare altra circonferenza. Perocchè, se ciò fosse possibile, il centro di questa seconda circonferenza dovrebbe sempre trovarsi sulle due perpendicolari DE, FG, altrimenti non potrebbe essere equidistante da'punti A, B, e dai punti B, C. Ma quelle due rette non possono avere più di un punto O di comune; dunque una è la circonferenza che può passare per i tre punti dati. Il che bisognava dimostrare.

*400. *Corollario I.* Se da un punto preso dentro di un cerchio si tirino alla circonferenza tre rette uguali, quel punto sarà il centro del cerchio.

401. *Corollario II.* Due circonferenze non possono avere più di due punti di comune senza confondersi in una sola.

PROPOSIZIONE CXXXIV — *TEOREMA.*

402. *Se due circonferenze hanno due punti di comune s'intersegano* (fig. 99).

Dim. Siano due circonferenze DHC, e CEH, o $CE'H$, che abbiano i punti H, C di comune. Dico che queste circonferenze devono intersegarsi.

Infatti, non volendo che la circonferenza CEH penetri nel cerchio DHC, o che la circonferenza $CE'H$ esca fuori del cerchio medesimo, bisognerebbe supporre che le circonferenze, oltre i due punti H, C, avessero di comune tutto l'arco HC, ed allora le due circonferenze avendo più di due punti di comune si confonderebbero in una sola. Dunque se le due circonferenze si trovano situate come nella figura, devono necessariamente intersegarsi.

Potrebbe supporsi che le due circonferenze fossero disposte in modo che la linea HC, la quale unisce i due punti ad esse comuni passasse pel centro di uno dei due cerchi come nella fig. 100, o che fosse una corda comune ad entrambi come nella fig. 101; ma l'impossibilità di queste due supposizioni si rende manifesta dalla seguente dimostrazione che si applica ad ambedue i casi.

Rappresentino A, B i centri de'cerchi (fig. 100, 101); si uniscano questi centri e si prolunghi la congiungente sino alla circonferenza esteriore. Nel triangolo ABC, sarà il lato AC minore di $AB+BC$, e poichè $BC=BD$, come raggi di un medesimo cerchio, ed $AC=AE$ per la stessa ragione, sarebbe AE minore di $AB+BD$, cioè il tutto minore della parte, il che è assurdo. Dunque due circonferenze s'intersegano quando hanno due punti di comune. Il che bisognava dimostrare.

403. *Scolio.* Due circonferenze che hanno un sol punto di comune (fig. 105, 106) non possono intersegarsi; perocchè se la circonferenza, il cui raggio è BC (fig. 105) entrasse nel cerchio terminato dall'altra, non potrebbe uscire da quello spazio chiuso senza

incontrare di nnovo in altro punto la circonferenza *NC* che lo circonda; e però le due circonferenze avrebbero due punti comuni, contro l' ipotesi.

Che se si volesse supporre che la circonferenza, il cui raggio è *BC* (fig: 106) entrasse nel cerchio terminato dall'altra, e ne nscisse per un solo e medesimo punto *C*, allora è evidente che essa non ne uscirebbe nel fatto, ma rimarrebbe tutta compresa nel cerchio *NC*, dimodochè l'intersezione non avrebbe più luogo. Dunque due circonferenze che hanno un sol punto di comune non possono intersegarsi, e poichè due circonferenze che hanno più di due punti di comune si confondono in nna sola (n° 401) si potrà conchiudere che *due circonferenze s'intersegano sempre in due punti; o non s'intersegano.*

PROPOSIZIONE CXXXV — *TEOREMA.*

404. *Se due cerchi s'intersegano, la retta che passa per i centri è perpendicolare a quella che unisce i due punti d'intersezione, e la divide per metà* (fig. 102):.

Dim. Imperocchè, se pel punto di mezzo *I* della retta *CD* che unisce i due punti d'intersezione, ed è corda comune ai due cerchi, s'innalzi sulla corda medesima una perpendicolare, questa dovrà passare per i centri *A* e *B* (n° 338). Ma per due punti non può passare che una sola linea retta; dunque, viceversa, la retta *AB* che unisce i due centri è perpendicolare alla corda *CD*, e la divide per mezzo. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXXXVI — *TEOREMA.*

405. *Se due cerchi s'intersegano, la distanza de'centri è minore della somma de'raggi, e maggiore della loro differenza* (fig. 102).

Dim. Perocchè quando due cerchi si tagliano i due punti d'intersezione *C*, e *D* devono trovarsi fuori della linea de'centri (n° 402); e per conseguenza potrà sempre formarsi un triangolo *ACB* fra ciascun punto d'intersezione ed i due centri. Ma in ogni triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due, e maggiore della loro differenza (n° 83), dunque se due cerchi si tagliano la distanza de'cerchi è minore della somma de'raggi, e maggiore della loro differenza. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXXXVII — *TEOREMA.*

406: *Se la distanza de'centri di due cerchi è minore della somma de' raggi, e maggiore della loro differenza, i cerchi si taglieranno* (fig. 102).

Dim. Perocchè, in tal caso con i due raggi, e la retta che unisce

i centri si potrà (n° 127) costruire il triangolo *ACB* da una parte di *AB*, ed il triangolo *ADB* eguale al primo dall'altra parte. Quindi le due circonferenze avranno due punti di comune *C*, *D*; e per conseguenza dovranno intersegarsi. Il che bisognava dimostrare.

PROPOSIZIONE CXXXVIII — *TEOREMA*.

407. *Se due cerchi si toccano, la retta che passa per i centri, passerà ancora pel punto di contatto* (fig. 103, 104).

Dim. I. Imperocchè, se i cerchi si toccano esternamente (fig. 103), ed il punto di contatto *C* esistesse fuori della linea *AB* che passa per i centri *A*, e *B*, si potrebbe formare il triangolo *ABC*, in cui la somma dei due lati o raggi *AC*, *CB* sarebbe minore del terzo lato *AB* composto dei due raggi e di uno spazio intermedio; il che è assurdo.

II. Se i cerchi si toccano internamente (fig. 104), ed il punto di contatto *C* si trovasse fuori della linea *AE* che passa per i centri *A*, e *B*, si formerebbe il triangolo *ABC*. in cui la somma di due lati sarebbe minore del terzo. Infatti, $EB + BA = AC$; ma *BC*, ovvero *BO*, è minore di *EB*, dunque $BC + BA$ sarà minore di *AC*; il che è assurdo, essendo due lati di un triangolo presi insieme maggiori del terzo lato. Il che bisognava dimostrare.

408. *Corollario I.* Di qui si deduce che: *se due cerchi si toccano la distanza dei centri è uguale alla somma; o alla differenza dei raggi, secondo che i cerchi si toccano esternamente, o internamente.*

409. *Corollario II.* Se due circonferenze non hanno alcun punto comune, sono interamente separate l'una dall'altra, potendo però esser situate una fuori dell'altra, o una dentro l'altra. Quindi nel primo caso la distanza de'centri è maggiore della somma de'raggi, e nel secondo minore della loro differenza.

*410. *Scolio.* Dalle cose fin qui dimostrate risulta manifesto che tutti i cerchi (fig. 106), i quali hanno i loro centri sulla linea *AB*, e passano pel punto *C*, sono tangenti l'uno all'altro, vale a dire hanno il solo punto *C* comune. Inoltre, se per questo punto s'innalzi sopra *AB* la perpendicolare *DF*, questa sarà tangente comune a tutti quei cerchi. Ma quantunque tra l'arco *CN* e la tangente *DF* si possa far passare una infinità di circonferenze diverse, pure non vi si può condurre alcuna linea retta; dappoichè in tal caso vi sarebbero nel punto *C* due tangenti, il che è assurdo (n° 386). Quindi l'*angolo del contatto*, cioè l'angolo *DCN* formato dall'arco e dalla tangente, è minore di qualunque angolo rettilineo dato, per quanto piccolo si voglia supporre.

PROPOSIZIONE CXXXIX — *TEOREMA*.

411. *Se la distanza de'centri di due cerchi è uguale alla somma, o alla differenza de'raggi, i cerchi si toccheranno* (fig. 105, 106).

Dim. Sia la distanza *AB* de' centri eguale alla somma de' raggi *AC*, *CB* (fig. 105). o alla loro differenza (fig. 106). Dico che i due cerchi si toccheranno.

Imperocchè, è evidente che il punto *C* è comune alle due circonferenze; nè può esservene altro; perchè in tal caso le due circonferenze si taglierebbero; e quindi (405) la distanza de' centri sarebbe minore della somma de' raggi, e maggiore della loro differenza contro la supposizione. Dunque le due circonferenze si toccano. Il che bisognava dimostrare.

* 412. *Scolio.* Riassumendo il fin qui detto si conchiude, che due circonferenze possono avere tre punti di comune, e si confondono in una sola; due punti di comune, e si segano; un sol punto di comune, e si toccano; finalmente nessun punto di comune, ed allora sono intieramente separate, ed una è fuori dell'altra, o una dentro l'altra.

La situazione rispettiva di due circonferenze che non si confondono dipende dalla distanza de' loro centri; essa è minore della somma de' raggi e maggiore della loro differenza nel caso dell' intersezione; eguaglia quella somma o quella differenza nel caso del contatto esterno o interno; e quando i due cerchi non si segano nè si toccano la distanza de' centri è maggiore della somma o minore della differenza de' raggi, secondo che i due cerchi sono fuori uno dell'altro o l' uno dentro l'altro. In questa ultima supposizione la distanza de' centri potrebbe anche esser nulla, ed allora i due cerchi avendo lo stesso centro diconsi *concentrici* (*).

Applicazione delle proprietà precedenti alla risoluzione di alcuni problemi.

413. *Problema I. Trovare il centro d'un cerchio o d'un arco dato* (fig. 98).

Soluzione. Si prendano sulla circonferenza o sull'arco tre punti ad arbitrio *A*, *B*, *C*, si tirino le corde *AB*, *BC*, e per i punti di mezzo di queste s'innalzino le perpendicolari *DE*, *FG*: il punto *O* del loro incontro sarà il centro richiesto (n° 372). Il che bisognava fare.

(*) Il progresso che si manifesta nella distanza de' centri, passando da una all'altra delle indicate posizioni di due cerchi, fa vedere che l'intersezione di due circonferenze può cambiarsi in contatto facendo crescere o facendo diminuire la distanza de' centri con trasportare uno di essi centri lungo la perpendicolare inalzata dal mezzo della corda che unisce i due punti d'intersezione. Nel movimento, questi due punti andranno man mano accostandosi fra loro finchè caderanno sulla linea de' centri confondendosi in un solo; la corda che li unisce si annullerà e l'intersezione de' cerchi si cambierà in contatto, analogamente a ciò che si è osservato per la secante che si cambia in tangente (n° 396). Questo passaggio dall'intersezione al contatto è la pruova più concludente della necessità di un unico punto di contatto ne' cerchi; mentre in altre curve i punti d'intersezione essendo più di due, la loro riduzione al contatto non può dare un solo punto, come ne' cerchi.

414. *Problema II. Per un punto dato condurre una tangente ad un cerchio.*

Soluzione. Se il punto dato A (fig. 92) è sulla circonferenza, si conduca il raggio AO, e su questo s'innalzi la perpendicolare BC, che sarà la tangente cercata (n° 385).

Se il punto A (fig. 107) è fuori del cerchio, si unisca questo punto col centro C, e sopra CA come diametro si descriva un cerchio che taglierà il dato ne' punti D, ed E; finalmente si tirino le corde AD, AE, le quali saranno ambedue tangenti al cerchio dato.

Infatti, tirando le corde DC, CE, saranno retti gli angoli CDA, CEA, perchè ciascuno di essi è iscritto nel semicerchio. Laonde ciascuna delle rette AD, AE, sarà perpendicolare all'estremità del raggio, e però tangente al cerchio (n° 385). Il che bisognava fare.

415. *Scolio.* Le due tangenti AD, AE, sono uguali, perchè l'ipotenusa CA è comune a' due triangoli rettangoli CDA, CEA, ed il cateto $CD = CE$; e però dev' esser l'altro cateto $AD = AE$ (n° 315).

416. *Problema III. Sopra una retta data descrivere un segmento di cerchio capace di un angolo dato, vale a dire un segmento tale che gli angoli in esso iscritti sieno uguali all' angolo dato* (fig. 91).

Soluzione. Sia AB la retta data. Si faccia l'angolo ABF uguale all'angolo dato; s'innalzi BO perpendicolare a BF, e GO perpendicolare ad AB nel punto di mezzo G; il punto d'incontro O sarà il centro, ed OB il raggio del cerchio richiesto.

Infatti essendo EF tangente, l'angolo ABF avrà per misura la metà dell'arco ACB (387); ma l'angolo AMB iscritto nel segmento alterno $AMNB$ ha pure per misura la metà di quell'arco, dunque i due angoli sono uguali. Il che bisognava fare.

*417. *Problema IV Da un dato cerchio tagliare un segmento capace di un angolo dato* (fig. 91).

Sol. Sia AMB il cerchio dato. In un qualunque punto B della circonferenza di questo cerchio si tiri la tangente BF, e si faccia l'angolo ABF eguale all'angolo dato, è manifesto che il segmento $AMNB$ sarà capace dell' angolo dato, perchè l' angolo AMB, o ANB, ec. iscritto in questo segmento è uguale all'angolo ABF. Il che bisognava fare.

418. *Problema V. dividere una retta data in media ed estrema ragione, vale a dire in due parti tali che la maggiore sia media proporzionale fra la retta intera e la minore* (fig. 108).

Sol. Sia AB la retta data. S'innalzi dal punto B la perpendicolare BC eguale alla metà di AB; col centro C, e col raggio CB si descriva un cerchio, e si tiri la retta AC, che si prolunghi in E. Finalmente si prenda sopra AB una parte $AF = AD$: la retta AB sarà divisa nel punto F in media ed estrema ragione.

Infatti, essendo AB tangente, ed AE secante, si ha la proporzione (n° 395).

$$AE : AB :: AB : AD, \text{ e } \textit{dividendo}$$
$$AE - AB : AB :: AB - AD : AD.$$

Ma la tangente AB è uguale al diametro DE, perchè AB è doppia del raggio BC, dunque $AE—AB$ è lo stesso che AD o pure AF. Inoltre $AB—AD$ è lo stesso che FB; per conseguenza la proporzione precedente diviene

$$AF : AB :: FB : AF, \text{ ed invertendo}$$
$$AB : AF :: AF : FB; \text{ vale a dire}$$

il segmento maggiore AF è medio proporzionale fra la linea intera AB ed il segmento minore FB. Il che bisognava fare.

* 419. *Problema VI. Costruire un rettangolo che sia equivalente ad un quadrato dato* C, *e tale che i lati adiacenti di esso rettangolo facciano una somma data* AB (fig. 109).

Soluzione. Si divida AB in due parti uguali nel punto D; indi fatto centro in D e col raggio DA si descriva il semicerchio ACB. Al punto A s' innalzi sul diametro AB la perpendicolare AG, sulla quale si prenda una parte AE uguale al lato del quadrato dato C, e dal punto E si conduca la retta EF parallela al diametro AB. Finalmente dal punto F, ove la parallela incontra la circonferenza, si abbassi sul diametro la perpendicolare FQ: dico che AQ, e QB sono i lati adiacenti del rettangolo cercato. Infatti le rette AE, e FQ sono uguali come lati opposti del rettangolo $EAQF$; di più la perpendicolare FQ è media proporzionale tra i due segmenti AQ, e QB del diametro (n° 345), dunque il rettangolo di AQ in QB è equivalente al quadrato di FQ, ovvero di AE, o in fine al quadrato dato C. Da un' altra parte la somma delle rette AQ, e QB è uguale ad AB, dunque il rettangolo di AQ in QB è il rettangolo richiesto. Il che bisognava fare.

* 420. *Scolio*. È manifesto che se AE è uguale al raggio CD, la retta EF sarà una tangente al cerchio, ed il rettangolo richiesto sarebbe $AD \times DB$, cioè un quadrato uguale al quadrato dato. Se poi AE è maggiore di CD, allora la parallela EF non incontra la circonferenza, ed il problema è impossibile. Dunque il problema è possibile quando il lato del quadrato non eccede il raggio CD, ovvero la metà della retta data AB.

* 421. *Problema VII. Trovare due rette che sieno reciprocamente proporzionali a due altre* M, *e* N, *e che facciano una somma data* AB (fig. 109).

Soluzione. Questo problema riducesi al precedente. Infatti tra le due rette date si trovi una media proporzionale, indi sopra AB come diametro si descriva un semicerchio, sulla tangente AG si prenda una parte AE uguale alla media proporzionale accennata; e si prosegua la costruzione come nel problema precedente: le rette AQ, e QB saranno le rette richieste. Perocchè essendo per costruzione il quadrato di FQ, o di AE uguale al rettangolo contenuto dalle rette date M, e N, ed essendo lo stesso quadrato di AE uguale al rettangolo di AQ in QB, ne segue che $AQ \times QB = M \times N$, ovvero le rette AQ, QB sono reciprocamente proporzionali alle rette M, e N, e fanno la somma data AB. Il che bisognava fare.

* 422. *Scolio*. È manifesto che con la stessa costruzione si potreb-

be *dividere una retta data* AB *in parti reciprocamente proporzionali a due rette date* M, *e* N.

*423. *Problema VIII. Costruire un rettangolo equivalente ad un quadrato dato* Q, *e tale che i lati adiacenti di esso rettangolo abbiano tra loro una differenza data* (fig. 108).

Soluzione. Sia *CB* la metà della differenza data. Fatto centro in *C*, e col raggio *CB* si descriva una circonferenza. All'estremità del raggio *CB* si conduca la tangente *BA*, che si faccia uguale al lato del quadrato proposto; indi si congiunga il punto *A* col centro *C*, e si prolunghi *AC* finchè incontri la circonferenza nel punto *E*. Dico che *AE*, ed *AD* sono i lati adiarenti del rettangolo richiesto. Infatti il rettangolo di *AE* in *AD* è uguale al quadrato di *AB* (n° 396); ed oltre a ciò la differenza delle rette *AE*, *AD* è uguale a *DE*, ossia alla differenza data, poichè *DE* essendo diametro è doppio del raggio *CB*, che è la metà della differenza data. Il che bisognava fare.

*424. *Scolio*. È evidente che questo problema è sempre possibile.

*425. *Problema IX. Trovare due rette che sieno reciprocamente proporzionali a due rette date* M, *e* N, *ed abbiano tra loro una differenza data* (fig. 108).

Soluzione. Questo problema riducesi al precedente. Infatti sia *CB* la metà della differenza data; si descriva col centro in *C*, e col raggio *CB* una circonferenza, indi si conduca la tangente *AB*, che sia uguale ad una media proporzionale tra le due rette date *M*, e *N*: finalmente si congiunga il punto *A* col punto *C*, e si prolunghi *AC* in *E*: le rette *AE*, *AD* saranno le rette richieste. Perocchè da una parte il quadrato di *AB* è uguale al rettangolo di *AE* in *AD*, e dall'altra parte lo stesso quadrato di *AB* è uguale al rettangolo compreso dalle rette *M*, e *N*: quindi sarà $AE \times AD = M \times N$, ossia le rette *AE*, *AD* sono reciprocamente proporzionali alle due rette date *M*, e *N*.ed hanno inoltre la differenza data *DE*, poichè *DE* è doppia di *CB*. Il che bisognava fare.

CAPITOLO XIV.

DE' POLIGONI ISCRITTI E CIRCOSCRITTI AL CERCHIO

426. *Definizione* I: Un poligono dicesi *iscritto* nel cerchio, quando ciascuno de'suoi angoli ha il vertice sulla circonferenza: in tal caso il cerchio si dirà *circoscritto* al poligono.

427. *Definizione* II.Un poligono è *circoscritto* il cerchio,se ciascuno dei suoi lati è tangente alla circonferenza; ed allora il cerchio si dirà *iscritto* al poligono.

428. La teorica, che andiamo ad esporre, appartiene specialmente alla iscrizione e circoscrizione de'poligoni regolari al cerchio; e però giova ricordarsi che dicesi regolare (n° 139) un poligono, quando è equilatero ed equiangolo.

Vi sono poligoni regolari di ogni numero di lati. Il triangolo equilatero è quello di tre lati, ed il quadrato quello di quattro.

PROPOSIZIONE CXL — *TEOREMA.*

429. *In ogni triangolo può iscriversi e ad ogni triangolo può circoscriversi un cerchio* (fig. 110).

Dim. Sia *ABC* un triangolo qualunque; si divida per mezzo l'angolo *A* con la retta *AO* (n° 101), e l'angolo *B* colla retta *BO*, e dal punto d'incontro *O* delle due rette si abbassi la perpendicolare *OF* sul lato *AC*; indi col centro in *O*, e col raggio *OF* si descriva un cerchio: dico che questo sarà iscritto al triangolo.

Infatti, si conduca *OD* perpendicolare ad *AB*, ed *OE* a *BC*. Nei triangoli *AOF ADO* gli angoli in *F*, e *D* sono retti, l'angolo *DAO* = *OAF* per costruzione, ed il lato *AO* è comune. perciò saranno uguali i due triangoli. (n° 88), e si avrà *OF* = *OD*. Nello stesso modo si dimostra che *OD* = *OE*; e quindi il cerchio è iscritto al triangolo,

La seconda parte della proposizione è evidente, dappoichè per tre punti *A*, *B*, *C* non in linea retta, può sempre passare una circonferenza. Il che bisognava dimostrare.

430. *Scolio.* È facile vedere che le tre rette *OA*, *OB*, *OC* che dividono per mezzo i tre angoli di un triangolo concorrono in un medesimo punto.

PROPOSIZIONE CXLI — *TEOREMA.*

431. *Ad ogni poligono regolare può essere iscritto e circoscritto un cerchio* (fig. 112).

Dim. Sia *ABE* un poligono regolare; se per i punti *I*, e *K* di mezzo de'lati *AB*, *BC* si conducono su questi lati le perpendicolari *IO*, *KO*, il punto d'incontro *O* sarà il centro del cerchio che passa per i tre punti *A*, *B*, *C* (n° 399); dico ora che questo cerchio passerà ancora pel punto *D*. vale a dire che *OD* = *OC*. Infatti i triangoli isosceli *AOB*, *OBC* sono uguali perchè hanno i tre lati respettivamente uguali; dunque l'angolo *OBA* = *OBC*, e la retta *BO* divide l'angolo *B* in due parti uguali, ma l'angolo *OBC*=*OCB*, ed è poi l' angolo *B*=*C*, dunque *OC* divide l'angolo *C* per mezzo, e quindi risulteranno uguali i triangoli *OCB*, *OCD* avendo un angolo uguale compreso fra lati rispettivamente uguali. Laonde si avrà *OD* = *OC*, e nello stesso modo si dimostrerà che *OD*=*OE*=*OF*.

Rimane a dimostrare che il cerchio descritto col centro in *O* e col raggio *OI* è iscritto al poligono *ABE*; ma ciò è manifesto essendo le corde uguali *AB*, *BC*, *CD*, ec. equidistanti dal centro. Il che bisognava dimostrare.

432. *Scolio. I.* Il punto *O*, centro comune del cerchio iscritto e del cerchio circoscritto si considera ancora come *centro del poligono regolare*; e per questa ragione gli angoli *AOB*, *BOC*, *COD*, ec. diconsi *angoli al centro del poligono*. È manifesto che tutti gli au-

goli al centro d'un poligono regolare sono uguali fra loro, e che il valore di ciascuno di essi si ottiene dividendo la somma di tutti gli angoli al centro, ossia quattro retti, pel numero de'lati del poligono.

433. *Scolio II.* Si noti ancora che *se si divida la circonferenza in un numero qualunque di parti uguali* AB, BC, CD, *ec.* (fig. 112), *e si uniscano i punti di divisione* A, B, C, *ec.*: *con altrettante corde, il poligono iscritto* ABCDEF *sarà un poligono regolare.*

Infatti, essendo uguali gli archi *AB, BC, CD,* ec. saranno uguali le corde *AB, BC, CD,* ecc., come pure gli angoli *ABC,BCD, CDE* ec., perchè iscritti in uguali segmenti.

Se dunque si sapesse dividere la circonferenza in quel numero di parti uguali che si vuole, si potrebbe *iscrivere in un cerchio dato qualunque poligono regolare.* Ora questo problema non ammette soluzione generale, appunto perchè con la riga ed il compasso non si può dividere la circonferenza in qualsivoglia numero di parti uguali. Ne'seguenti problemi vedremo quali sono i poligoni regolari che si possono iscrivere in un cerchio dato, e per conseguenza circoscrivere; essendo queste due cose, come si vedrà, intimamente connesse fra loro.

PROPOSIZIONE CXLII — *PROBLEMA.*

434. *Iscrivere un quadrato in un cerchio dato* (fig. 113).

Soluzione. Si conducano due diametri *AC, BD* che si taglino ad angoli retti, e si uniscano le estremità *A, B, C, D* colle corde *AB, BC, CD, DA*; la figura *ABCD* sarà il quadrato iscritto, perchè essendo uguali gli angoli al centro, gli archi *AB, AC* ec. risultano uguali, e però il poligono sarà regolare (n° 433). Il che bisognava fare.

435. *Scolio.* Il triangolo *ABO* essendo rettangolo ed isoscele, ne risulta che il quadrato di *AB* è doppio del quadrato di *AO*. Quindi si avrà $\overline{AB}^2 : \overline{BO}^2 :: 2 : 1$, ovvero $AB : AO :: \sqrt{2} : 1$, vale a dire che *il lato del quadrato iscritto sta al raggio come la radice quadrata di 2 sta all'unità.*

Applicando lo stesso ragionamento al triangolo rettangolo ed isoscele *BDA* si troverà che la diagonale *BD* del quadrato sta al lato *AB* come $\sqrt{2} : 1$, onde queste due linee sono incommensurabili; il che era stato dimostrato in altro modo (n° 205).

PROPOSIZIONE CXLIII — *PROBLEMA.*

436. *Iscrivere un esagono regolare ed un triangolo equilatero in un cerchio dato* (fig. 114).

Soluzione. Supponiamo il problema risoluto, e sia *AB* un lato dell'esagono iscritto; se si tirino i raggi *OA, OB,* dico che il triangolo *AOB* è equilatero. Imperochè, essendo per ipotesi l'arco *AB*

sesta parte della circonferenza, sarà l'angolo al centro AOB sesta parte di quattro retti, o terza di due retti: per conseguenza gli angoli A, B del triangolo isoscele AOB equivalgono insieme a due terze parti di due retti, e però ciascuno di essi è la terza parte di due retti. Laonde il triangolo AOB è equiangolo, e quindi equilatero. Dunque il lato dell'esagono iscritto è uguale al raggio. Dal che ne segue che portando il raggio sei volte sulla circonferenza si avrà il poligono cercato.

Se ora si conducano le rette AC, CE, EA, il triangolo iscritto che ne risulta sarà equilatero, dappoichè le rette accennate sono le corde degli archi uguali ABC, CDE, EFA. Il che bisognava fare.

437. *Scolio*. La figura $ABCO$ essendo una losanga, sarà (n° 340) il quadruplo quadrato di AB eguale alla somma dei quadrati di AC, e di BO; ma $AB = 1$, dunque il quadrato di AC sarà triplo del quadrato di AB. Laonde se $AB = 1$, si avrà $AC = \sqrt{3}$, vale a dire che

Il lato del triangolo equilatero iscritto sta al raggio come la radice quadrata di 3 sta all'unità.

PROPOSIZIONE CXLIV — *PROBLEMA*.

438. *Iscrivere in un cerchio dato un decagono, ed un pentagono regolare* (fig. 115).

Soluzione. 1°. Si divida il raggio AO in media ed estrema ragione nel punto M (n° 418); indi col centro in A e con un raggio $= MO$, ossia al segmento maggiore, si descriva un arco che tagli la circonferenza nel punto B, la corda AB sarà il lato del decagono richiesto. Infatti, si conduca il raggio OB, e la retta BM. E poichè per costruzione $AO : OM :: OM : MA$, ed è $MO = AB$, si avrà $AO : AB :: AB : MA$, e quindi il triangolo ABO sarà simile (n° 302) al triangolo AMB; ma il primo è isoscele, dunque lo è ancora il secondo, e sarà $AB = BM = MO$, e per conseguenza il triangolo BMO risulterà pure isoscele. Laonde l'angolo AMB esterno al triangolo MOB sarà doppio dell'angolo O: ma l'angolo $AMB = MAB = ABO$; dunque il triangolo isoscele AOB è tale che ciascuno de' suoi angoli alla base è doppio dell'angolo al vertice, il quale sarà perciò la quinta parte di due retti, o la decima parte di quattro retti. Dunque l'arco AB è la decima parte della circonferenza, e la corda AB è il lato del decagono regolare iscritto.

2°. Unendo di due in due i vertici del decagono regolare iscritto, si avrà evidentemente il pentagono regolare iscritto. Il che bisognava fare.

PROPOSIZIONE CXLV — *PROBLEMA*.

439. *Iscrivere in un cerchio dato un pentedecagono regolare* (fig. 115).

Soluzione. Si adatti nel cerchio una corda *AL* uguale al lato dell'esagono, e, partendo dallo stesso punto *A* la corda *AB* uguale come qui sopra al lato del decagono, la corda dell'arco *BL* sarà il lato del pentedecagono regolare richiesto.

Infatti, essendo l'arco *AL* la sesta parte, o $\frac{2}{30}$ della circonferenza e l'arco *AB* la decima parte, o $\frac{3}{30}$ della circonferenza medesima, l'arco *BL*, differenza de'due archi accennati, sarà $\frac{2}{30}$, ovvero $\frac{1}{15}$ della circonferenza; e per conseguenza la corda *BL* sarà il lato del pentedecagono regolare. Il che bisognava fare.

440. *Scolio I*. Un poligono regolare essendo iscritto al cerchio, se si dividono gli archi sottesi dai suoi lati in due parti uguali, e si conducano le corde delle metà degli archi, si avrà un poligono regolare iscritto di un numero doppio di lati.

Laonde il quadrato può servire ad iscrivere successivamente i poligoni regolari di 8, 16, 32, ec. lati: il decagono quelli di 20, 40, 80, ec. lati; il pentedecagono quelli di 30, 60, 120, ec. lati.

441. *Scolio II*. Sia *BC* (fig. 120), un lato di un poligono regolare iscritto. Se si divida l'arco *BDC* in due parti uguali, e dal punto di mezzo *D* si tirino le corde *DB*, *DC*, la somma di queste due corde sarà maggiore della corda *BC*. Parimente se si divida l'arco *BD* per mezzo nel punto *E*, e l'arco *DC* anche per mezzo nel punto *O*, e si tirino le corde *BE*, *DE*, *DO*, *CO*, la somma di queste quattro corde sarà maggiore della somma delle due *BD*, *CD*. Dividendo ciascuno degli archi *BE*, *DE*, *DO*, *CO* in due parti eguali, e tirando le corde, la somma delle otto corde, che ne risultano, sarà maggiore di quella delle quattro precedenti, e con più ragione di quella delle due *BD*, *CD*. Dicasi lo stesso della somma di 16, 32, 64, ecc., corde indefinitamente; e però

I lati dei poligoni regolari iscritti vanno sempre diminuendo, ed al contrario le loro somme, ossiano i perimetri dei poligoni, vanno sempre crescendo ed accostandosi alla circonferenza del cerchio.

PROPOSIZIONE CXLVI — *TEOREMA*

* 442. *Il quadrato del lato del pentagono regolare iscritto è uguale al quadrato del raggio più il quadrato del lato del decagono regolare iscritto nel medesimo cerchio* (fig. 116).

Dim. Sia *ABCDE* il pentagono regolare iscritto. L'angolo al centro *BOA* è $\frac{4}{5}$ di un retto (n° 432) per conseguenza ciascuno degli angoli *OAB*, *OBA* è $\frac{2}{5}$ di un retto. Ora, se si divida l'arco *BFA* in due parti uguali, ciascuna delle corde *BF*, *FA* sarà un lato del decagono, e l'angolo al centro *AOF* sarà $\frac{2}{5}$ di un retto. Ciò premesso, si divida l'arco *FA* per mezzo nel punto *G*, e si conducano le rette *OG*, *FM*; le rette *MA*, *MF*, saranno eguali come oblique equidistanti dalla perpendicolare *OG*, e però il triangolo *FAM* sarà isoscele, e simile al triangolo isoscele *AFB* col quale ha l'angolo *A* di comune, quindi si avrà la proporzione *AM* : *AF* :: *AF* : *AB*,

dalla quale si deduce (n° 218) che il quadrato di *AF* è uguale al rettangolo di *AB* in *AM*.

Parimente il triangolo *BOM*, di cui due angoli *OBM*, *BOM* valgono ciascuno $\frac{1}{2}$ di un retto, è isoscele e perciò simile al triangolo isoscele *BOA* col quale ha di comune l'angolo *B*, onde si ha la proporzione *MB* : *BO* :: *BO* : *AB*, da cui si ricava (n° 218) che il quadrato di *BO* è uguale al rettangolo di *AB* in *MB*. Or si è dimostrato (n° 327) che il quadrato di *AB* è uguale alla somma de'due rettangoli di *AB* in *AM*, e di *AB* in *MB*, dunque il quadrato di *AB* è uguale alla somma de'due quadrati di *AF*, e di *OB*. Il che bisognava dimostrare.

*443. *Scolio*. È facile ora determinare il lato del quadrato, del triangolo equilatero, del decagono, e del pentagono, essendo dato il raggio *AB* (fig. 117) del cerchio, in cui quei poligoni devono essere iscritti. Infatti, se *AB* rappresenta il raggio del cerchio, s'innalzi ad esso la perpendicolare *BC* = *AB*, e si tiri *AC*; sarà questo il lato del quadrato. Sopra *AC* si alzi la perpendicolare *DC* = *AB*, e si conduca *DA*, sarà questo il lato del triangolo equilatero iscritto, dappoichè il quadrato di *AD* risulta triplo del quadrato del raggio *AB*. Finalmente si divida il raggio *AB* in media ed estrema ragione nel punto *E*, e sia *EB* il segmento maggiore; questo sarà il lato del decagono, e la congiungente *CE* sarà il lato del pentagono.

PROPOSIZIONE CXLVII — *TEOREMA*.

444. *Essendo iscritto in un cerchio un poligono regolare, si può sempre circoscrivere al cerchio medesimo un poligono simile* (fig. 113).

Dim. Sia *abd* il poligono iscritto; si dividano gli archi *ab*, *bc* ecc. ciascuno in due parti uguali ne' punti *m*, *n*, *k*, *l*, *r*, e per questi punti si tirino le tangenti *AB*, *BC*, *CD*, ecc.; dico che il poligono *ABD* formato dall'incontro di queste tangenti è simile ad *abd*.

Infatti, essendo uguali gli archi *mr*, *mn*, *nk*, ecc., le loro corde sono pure uguali, per conseguenza saranno uguali i triangoli *rAm*, *mBn*, *nCk*, ecc., che hanno queste corde uguali per basi, e gli angoli adiacenti uguali, perchè ciascuno di essi è formato da una tangente e da una corda, ed ha per misura la metà di un arco uguale all'arco *mr* (n° 387). Da questi triangoli isosceli ed uguali si ricava subito che le tangenti *AB*, *BC*, *CD*, ec. sono tutte uguali fra loro, come pure gli angoli *A*, *B*; *C*, ec.; e però il poligono circoscritto sarà regolare e simile all'iscritto (n° 323). Il che bisognava dimostrare.

445. *Corollario*. Se è dato il poligono circoscritto *ABD*, tirando le corde *mr*, *mn*, *nk*, ecc., il poligono iscritto che ne risulta sarà simile al circoscritto. Parimente è facile vedere che se si dividono per metà gli archi *mr*, *mn*, *nk*, ecc., e si congiungono i punti di

mezzo *a*, *b*, *c*, ecc., il poligono *abd* che ne nasce è anche simile ad *ABD*.

446. *Scolio*. Se si considerino le tangenti *AB*, *AC* (fig. 120) che sono metà di lati del poligono circoscritto corrispondente allo iscritto che ha per lato *BC*, sarà $AB + AC > BC$; e per conseguenza si vede primieramente che il lato del poligono circoscritto è maggiore del lato del corrispondente poligono iscritto. Per passare al poligono circoscritto di un doppio numero di lati, basterà condurre la tangente *MN*; e poichè si ha $MN < AM + AN$, la somma delle quattro tangenti *BM*, *MD*, *DN*, *NC*, che equivalgono a due lati del poligono circoscritto, sarà minore della somma delle due tangenti *BA*, *AC*, ossia del lato del poligono precedente. Sono poi le quattro tangenti indicate maggiori delle due corde *BD*, *DC*, cioè la somma di due lati del poligooo circoscritto è maggiore di quella di due lati del corrispondente poligono iscritto. Continuando allo stesso modo, alle quattro corde *BE*, *DE*, *DO*, *CO*, corrisponderanno otto tangenti, ossiano quattro lati del correlativo poligono circoscritto; e la somma di quelle otto tangenti sarà minore della somma delle quattro precedenti, e con più ragione delle due *AB*, *AC*, mentre sarà maggiore della somma delle quattro corde corrispondenti. Dunque raddoppiando successivamente il numero delle tangenti e delle corde, e tenendo presente ciò che si è dimostrato (n° 441) rispetto ai poligoni iscritti si potrà stabilire.

1.° *I lati dei poligoni iscritti e circoscritti divengono sempre più piccoli.*

2.° *I perimetri de' poligoni iscritti vanno sempre crescendo, e quelli de' circoscritti sempre diminuendo.*

3.° *I perimetri de' poligoni iscritti, e quelli de' poligoni circoscritti si avvicinano sempre fra loro per valore e per posizione, e gli uni e gli altri si accostano pure alla circonferenza intermedia del cerchio.*

PROPOSIZIONE CXLVIII — *TEOREMA:*

447. *L'aja di un poligono regolare ha per misura il prodotto del suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto* (fig. 112).

Dim, Imperocchè, se dal centro *O* del poligono regolare *ABE* si conducano a tutti i vertici di esso le rette *OA*, *OB*, *OC*, ec., si dividerà questo poligono in tanti triangoli isosceli uguali, quanti sono i suoi lati. Ma l'aja di uno di questi triangoli *AOB* ha per misura la sua base *AB* moltiplicata per la metà della sua altezza *OI*, raggio del cerchio iscritto nel poligono; dunque l'aja di quest'ultimo avrà per misura la somma delle basi de' triangoli, cioè il suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto. Il che bisognava dimostrare.

448. *Scolio*. Si noti che il raggio *OI* del cerchio iscritto prende ancora il nome di *apotema del poligono regolare*; e che il raggio

OA del cerchio circoscritto si chiama talvolta *raggio del poligono regolare*.

PROPOSIZIONE CXLIX — *TEOREMA*.

449. *I perimetri de' poligoni regolari d'un medesimo numero di lati stanno come i raggi de' cerchi iscritti e circoscritti; e le loro aje come i quadrati di questi medesimi raggi* (fig. 111).

Dim. Sieno *ABD*, *abd* due poligoni regolari dello stesso numero di lati; e sieno *AO*, *ao*, i raggi de' cerchi circoscritti, ed *OH*, *oh* quelli de' cerchi iscritti.

Essendo l'angolo $A = a$, le loro metà, cioè gli angoli *OAH*, *oah* saranno uguali; e perciò risulteranno simili i due triangoli rettangoli *OAH*; *oah*, onde si avrà.

$$AH : ah :: AO : ao :: OH : oh.$$

ed elevando a quadrato i termini di queste proporzioni sarà pure

$$\overline{AH}^2 : \overline{ah}^2 :: \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2 :: \overline{OH}^2 : \overline{oh}^2$$

Ma i perimetri de' poligoni simili *ABD*, *abd* stanno come i lati *AB*, *ab*, o come le loro metà *AH*, *ah*; e le aje degli stessi poligoni stanno come i quadrati di questi medesimi lati, o delle loro metà; dunque la proposizione enunciata diviene manifesta. Il che bisognava dimostrare.

CAPITOLO XV.

DELLA MISURA DEL CERCHIO.

450. La trasformazione di un poligono in un triangolo equivalente (n° 290) e quella di un triangolo in un quadrato (348) equivalente ci ha dato il mezzo di ottenere la *quadratura* di un poligono qualunque. Rimane ora a vedere se si può trasformare il cerchio in un triangolo, e quindi in un quadrato equivalente; dappoicchè senza questa trasformazione sarebbe impossibile ottenerne la misura.

PROPOSIZIONE CL — *LEMMA*.

451. *La circonferenza del cerchio si può considerare come il perimetro di un poligono regolare di un numero infinito di lati* (fig. 120).

Dim. Cia *BCLI* la circonferenza di un cerchio; e dinoti la corda *BC* il lato di un poligono regolare iscritto, e le tangenti *AB*, *AC* siano le metà di due lati del corrispondente poligono circoscritto. Si è dimostrato (n° 446) che raddoppiando successivamente il numero de' lati de' poligoni iscritti e circoscritti, essi lati divengono sempre più piccoli, ed i perimetri de' poligoni si avvicinano sempre

fra loro ed alla circonferenza intermedia del cerchio. Or dico che la lunghezza de' lati accennati, a forza di raddoppiarne il numero, deve diminuire al di sotto di qualunque lunghezza data.

Infatti, se un lato qualunque *BD*, *MN* di poligono iscritto o circoscritto non potesse diminuire al di sotto di una certa parte *K* del diametro *BL*, siccome il numero de' lati di tali poligoni si può accrescere indefinitamente, così la lunghezza *K* si troverebbe moltiplicata per un numero tanto grande quanto si vuole, e per conseguenza il prodotto che ne risulterebbe, cioè il perimetro del poligono circoscritto, o del poligono iscritto, sarebbe maggiore di qualunque grandezza data, il che è assurdo; perocchè si è dimostrato (n° 446) che il perimetro del poligono circoscritto è sempre minore del perimetro del poligono i cui lati sono doppi di *AB*, *BC*, ed il perimetro del poligono iscritto è sempre minore di quello del circoscritto corrispondente.

Dunque le lunghezze de' lati de' poligoni iscritti e circoscritti non possono nella loro progressiva diminuzione avere un *limite finito*, ma debbono divenire *infinitamente piccole*, cioè debbono diminuire al di sotto di qualunque lunghezza data; e quindi i perimetri de' poligoni iscritti e circoscritti dovranno avere per limite una linea curva, perchè solo in una linea di tal natura non si distinguono elementi finiti rettilinei (n° 13). E poichè i perimetri de' poligoni regolari iscritti nel continuo loro incremento non possono uscir fuori della circonferenza del cerchio, e viceversa i perimetri de' poligoni circoscritti nella loro progressiva diminuzione non possono penetrare dentro del cerchio medesimo; ne segue evidentemente che la circonferenza del cerchio è la linea curva limite comune degli uni e degli altri perimetri; e però la circonferenza del cerchio si può considerare come il perimetro di un poligono regolare di lati infinitamente piccoli, o ciò che vale lo stesso, come il perimetro di un poligono regolare di un numero infinito di lati. Il che bisognava dimostrare.

452. *Corollario* I. Poichè la circonferenza del cerchio è il massimo fra tutti i perimetri de' poligoni regolari iscritti, ed il minimo fra tutti i perimetri dei poligoni circoscritti, si può ora conchiudere che

La circonferenza del cerchio è maggiore del perimetro di ogni poligono regolare iscritto, e minore del perimetro di qualunque poligono regolare circoscritto (*).

(*) Archimede stabilisce per principio geometrico che di due linee o curve o composte di rette, le quali terminano agli stessi punti e rivolgono la concavità dalla medesima parte, è maggiore quella che comprende l'altra dentro di se. Applicando questo principio al cerchio ed ai poligoni regolari iscritti e circoscritti, ne segue che l'arco *BDC* (fig. 120) è maggiore della somma delle corde *BD*, *DC*, e minore di quella delle tangenti *AB*, *AC*; e per conseguenza la circonferenza del cerchio *BCLI* è maggiore del perimetro di ogni poligono regolare iscritto, e minore del perimetro di ogni poligono regolare circoscritto. Or tutte le dimostrazioni fatte di quel princi-

sul cerchio; il poligono dovrebbe essere ancor esso minore del triangolo, il che non può sussistere; dappoichè l'apotema *Om* è uguale al raggio, ed il perimetro è maggiore della circonferenza (n° 452), per cui l'aja del poligono *ABCD* deve essere necessariamente maggiore di quella del triangolo. Dunque il cerchio non può essere nè minore nè maggiore del triangolo, ma dovrà essergli equivalente. Il che bisognava dimostrare (*).

457. *Scolio*. Se dunque si sapesse ***rettificare*** la circonferenza, cioè trovare una retta uguale alla circonferenza di un cerchio dato, si potrebbe trasformare il cerchio in un quadrato equivalente. Vedremo in appresso che la rettificazione della circonferenza non si può ottenere che per approssimazione; e per conseguenza il famoso problema della ***quadratura del circolo*** non si può risolvere rigorosamente.

PROPOSIZIONE CLII — *TEOREMA*.

458. ***Le circonferenze de' cerchi stanno fra loro come i raggi, ed i cerchi come i quadrati de' medesimi raggi*** (fig. 111).

Dim. Infatti, i perimetri de' poligoni regolari *ABCDE*, *abcde* di un medesimo numero di lati stanno fra loro come i raggi *OB*, *ob* de' cerchi *ABD*, *abd* (n° 449), e le loro aje come i quadrati de' medesimi raggi. Ma le circonferenze di questi cerchi si possono considerare come perimetri di poligoni regolari di un numero infinito di lati (n° 451), dunque le circonferenze de' cerchi stanno fra loro come i raggi, ed i cerchi come i quadrati degli stessi raggi. Il che bisognava dimostrare (**)

* 459. *Corollario*. Apparisce da questo teorema che se si descrivono tre semicerchi con i tre lati di un triangolo rettangolo *ACB* (fig, 119) presi per diametri, questi semicerchi staranno fra loro come i quadrati di questi tre lati. Ma il quadrato fatto sull'ipotenusa *AB* è uguale alla somma de' quadrati de' cateti *AC*, *BC*, dunque il se-

(*) Questa dimostrazione appartiene ad Archimede, che fu primo a dare la misura del cerchio. Essa è fatta col *metodo di esaustione*, il solo adoperato dagli antichi geometri per mancanza de' mezzi che ora possediamo.

(**) È facile vedere che questo teorema avrebbe potuto dimostrarsi col metodo di esaustione, cioè con la riduzione all'assurdo, di cui abbiamo dato una idea sufficiente riportando nel n° 456 la genuina dimostrazione di Archimede intorno alla misura del cerchio. Ma dalle considerazioni fatte nella nota al n° 452 apparisce chiaro che il pesante giro del metodo di esaustione non fa che rendere difficili le dimostrazioni senza nulla aggiungere al rigore, perchè ha bisogno del principio di Archimede, il quale come vedemmo si confonde, in quanto al cerchio, con l'altro, che la circonferenza si può considerare come il perimetro di un poligono regolare di un numero infinito di lati. E lo stesso deve dirsi delle dimostrazioni fatte col così detto *metodo dei limiti*, il quale non è che il metodo di esaustione semplificato, perchè quello non ha bisogno della riduzione all'assurdo, ma ha bisogno però del principio di Archimede.

micerchio *ACB* è uguale alla somma de'due altri *ADC*, *BFC*; e però se si tolgono di comune i segmenti *AEC*, *BGC*, sarà il triangolo *ACB* equivalente alla somma de'due spazj curvilinei *ADCE*, *CFBG*, che si chiamano *Lunule d'Ippocrate*, perchè Ippocrate di Chio fu primo a conoscere la proprietà, di cui è parola.

PROPOSIZIONE CLIII — *TEOREMA*.

460. *Il settore ha per misura il prodotto del suo arco per la metà del raggio* (fig. 121).

Dim. Col ragionamento fatto nel (n° 378) si può dimostrare che in un medesimo cerchio, o in cerchi uguali, il settore *AOBM* sta al settore *EODN* come l'arco *AMB* all'arco *END*. Ora, se l'arco *END* è un quadrante, il settore *EODN* sarà la quarta parte del cerchio; per conseguenza il settore *AOBM* sta a 4 volte il settore *EODN*, ovvero al cerchio intero, come l'arco *AMB* a 4 volte l'arco *END*, ossia alla circonferenza. Si ha dunque la proporzione *Settore*: *cerchio* :: *arc*. AMB : *circonferenza*, dalla quale, moltiplicando i termini della seconda ragione per la metà del raggio *AO*, risulta, *settore*: *cerchio* :: *arc AMB* $\times \frac{1}{2}$ *AO*: *circonf.* $\times \frac{1}{2}$ *AO*: e poichè i due conseguenti sono uguali, saranno uguali anche gli antecedenti; onde il settore ha per misura il suo arco moltiplicato per la metà del raggio. Il che bisognava dimostrare.

461. *Definizione*. In due cerchi differenti, si chiamano *archi simili*, *settori simili*, *segmenti simili*, quelli che corrispondono ad angoli al centro uguali. Così l'angolo *O* (fig. 111) essendo uguale all'angolo *o*, l'arco *AMB* è simile all'arco *amb*, il settore *AOBM* simile al settore *aobm*, ed il segmento *ABM* al segmento *abm*.

PROPOSIZIONE CLIV — *TEOREMA*.

462. *Gli archi simili stanno come i raggi, ed i settori simili come i quadrati di questi medesimi raggi* (fig. 111).

Dim. Sieno gli archi simili *AMB*, *amb*, ed i settori simili *AOBM* *aobm*; sarà l'angolo *O* uguale all'angolo *o*. Ora l'angolo *O* sta a quattro angoli retti come l'arco *AMB* sta alla circonferenza intera (n° 379), ed allo stesso modo l'angolo *o*, ovvero *O*, sta a quattro retti come l'arco *amb* alla circonferenza: dunque gli archi *AMB*, *amb* stanno come le circonferenze di cui fan parte, ovvero come i raggi *AO*, *ao*. Per la medesima ragione i settori stanno come i cerchi, ossia come i quadrati dei raggi *AO*, *ao*. Il che bisognava dimostrare.

Della rettificazione della circonferenza e degli archi del cerchio.

463. Se si dinotano con C e C' due circonferenze, e con R e R' i loro raggi, i diametri saranno $2R$, e $2R'$, ed in virtù del teorema (n° 458), si avrà $C : C' :: 2R : 2R'$, e permutando $C : 2R :: C' : 2R'$, ovvero (n° 190).

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$$

Quindi apparisce che

Il rapporto di una circonferenza al suo diametro è costante, ossia è lo stesso per qualunque cerchio. E però se questa quantità costante fosse determinata, si avrebbe la rettificazione della circonferenza di un cerchio dato moltiplicando il suo diametro per la suddetta quantità costante.

Si rappresenta comunemente con la lettera greca π il rapporto della circonferenza al diametro. Laonde moltiplicando π per $2R$, il prodotto $2\pi R$ rappresenterà la circonferenza del cerchio, il cui raggio è R, poichè essendo $\pi = \frac{C}{2R}$, si ha $2\pi R = C$. In conseguenza di ciò, se si moltiplicherà la circonferenza $2\pi R$ per la metà del raggio, il prodotto πR^2 dinoterà il cerchio che ha R per raggio, vale a dire che

Il cerchio è equivalente al quadrato del suo raggio moltiplicato per π; e la circonferenza al doppio del raggio moltiplicato per lo stesso numero.

Se dunque si potesse assegnare il valore esatto di π, si avrebbe la rettificazione della circonferenza, e quindi la quadratura esatta del circolo: ma ciò non può ottenersi essendo stato dimostrato dal sommo geometra tedesco Lambert che il rapporto della circonferenza al diametro è incommensurabile. Adunque non si può ottenere il valore di π che per approssimazione. Archimede fu primo ad occuparsi di una così importante ricerca, ed assegnò per valore approssimativo di π la frazione $\frac{22}{7}$; vale a dire che posto il diametro uguale a 7, la circonferenza sarà approssimativamente uguale a 22. Questa appprossimazione basta in quasi tutte le applicazioni della geometria alle arti. Un rapporto assai più approssimativo di qnello di Archimede è dovuto ad Adriano Mezio geometra Olandese, che trovò $\pi = \frac{355}{113}$. Finalmente si è avuta la pazienza di spingere l'appossimazione fino a 140 cifre decimali, delle quali le prime dieci sono

$$\pi = 3,1415926535.$$

Una tale approssimazione basta per le applicazioni le più delicate della geometria ai problemi di Astronomia, di Meccanica, ecc... Laonde la quadratura esatta del circolo non avrebbe alcun vantaggio reale sulla quadratura approssimativa, di cui parliamo. Passeremo ora ad esporre uno de' procedimenti più elementari, coi quali si è giunto a trovare il valore approssimativo di π.

Soluzione. Giusta il principio di Archimede (n° 452), la circonferenza del cerchio circoscritto ad un poligono regolare è maggiore del perimetro del poligono medesimo, mentre la circonferenza del cerchio iscritto è minore di quello stesso perimetro. Quindi risulta manifesto che la circonferenza, la quale fosse uguale al suddetto perimetro, dovrebb'essere compresa fra le due circonferenze summentovate; e poichè le circonferenze stanno come i raggi, si conchiuderà che il raggio di questa terza circonferenza dev'essere compreso fra i raggi de'cerchi iscritto e circoscritto al poligono.

Ciò premesso, si prenda per punto di partenza un quadrato (fig. 123), di cui un lato AC sia uguale a 2; il perimetro sara 8; e si vuol trovare il raggio di una circonferenza di questa lunghezza, ossia della circonferenza isoperimetra. Il centro del quadrato trovasi nel punto O d'intersezione delle due diagonali; quindi il raggio del cerchio circoscritto è OA, e quello dell'iscritto è la perpendicolare OB abbassata dal centro O sul lato AC, che resta diviso per metà nel punto B. Ora essendo $OB = AB$, il raggio del cerchio iscritto sarà uguale ad 1; ed il raggio AO del cerchio circoscritto sarà uguale alla radice quadrata di 2, ossia $\sqrt{2}$, perchè il triangolo ABO è rettangolo ed isoscele (n° 315). Dunque il raggio del cerchio, di cui la circonferenza è 8, si trova compreso tra 1 e $\sqrt{2}$.

Ciò posto, se nell'espressioni (1); e (2) della proposizione precedente si ponga 1 in luogo di r, e $\sqrt{2}$ in luogo di R, si avranno i valori di r', e R', cioè de'raggi de'cerchi iscritto e circoscritto all'ottagono regolare, di cui il perimetro è 8. Se si mettono questi nuovi valori in vece di r, e R nell'espressioni citate (1), e (2), i valori che risulteranno, dinoteranno i raggi de'cerchi iscritto e circoscritto al poligono regolare di 16 lati, di cui il perimetro è 8. Proseguendo in questo modo, allorchè si sarà giunto al poligono di 4096 lati, il raggio del cerchio iscritto sarà espressoda 1,273239, e quello del circoscritto da 1,273239. Quindi si vede che per un poligono di 4096 lati, di cui il perimetro è 8, la differenza tra i raggi de'cerchi iscritto e circoscritto è minore di una unità della sesta cifra decimale. Ora essendo il lato del quadrato circoscritto ad un cerchio uguale al diametro, ne segue che la circonferenza di un cerchio qualunque è sempre minore del quadruplo del diametro, ovvero di 8 volte il suo raggio; e però se la differenza fra i raggi di due cerchi qualunque è *uno*, la differenza fra le loro circonferenze dovrà esser minore di 8. Laonde la differenza tra le circonferenze de'cerchi iscritto e circoscritto al poligono di 4096 è minore di 8 unità del sesto ordine decimale, e perciò minore di una unità del quinto ordine. Limitandoci a questa approssimazione, si può prendere il perimetro costante de'poligoni, che si è supposto uguale ad 8, per una di queste due circonfererenze, dappoichè esso è compreso fra loro, vale a dire si può prendere quel perimetro per la circonferenza di cui il raggio è 1,273239. Quindi una circonferenza uguale a 8 ha il raggio uguale ad 1,273239. Il rapporto tra

questa circonferenza ed il suo diametro ovvero il rapporto tra la semicirconferenza ed il raggio è dunque

$$\frac{4}{1,273239}, \text{ ossia } \frac{4000000}{1273239} = 3,14159.$$

Però limitando l'approssimazione a cinque cifre decimali si ha

$$\pi = 3,14159.$$

466. *Scolio.* La rettificazione degli archi di cerchio si deduce facilmente da quella della circonferenza, premettendo che la circonferanza si suole dividere da'geometri in 360 parti uguali, che si chiamano gradi, ed ogni grado in 60 minuti, ed ogni minuto in 60 secondi.

Per indicare un arco di un dato numero di gradi, minuti, e secondi, per esempio, di 48 gradi, 35 minuti, e 24 secondi, si scrive $48^\circ\ 35'\ 24''$. Ciò posto, se si dinoti con A la lunghezza d'un arco, con N il numero de'gradi, minuti, e secondi di cui si compone, e con C la lunghezza della circonferenza alla quale appartiene, si avrà evidentemente:

$$A : C :: N : 360^\circ,$$

da cui si ricava $A = \frac{C \times N}{360^\circ}$

vale a dire che per avere la lunghezza d'un arco, convien moltiplicare quella della circonferenza cui appartiene pel numero dei gradi di cui si compone, e dividere il prodotto per 360.

NOTA

al n° 330 — *pag* 77.

Riportiamo in questo luogo una proposizione che è una conseguenza delle proposizioni XCVII, e XCVIII. L'abbiamo tralasciata nel testo perchè non necessaria, onde non si trova più nelle moderne istituzioni di geometria, ma bisogna andare a cercarla negli *Elementi di* Euclide lib. II. prop. 8.

Il quadrato fatto sulla somma di due rette meno il quadrato fatto sulla differenza è uguale al quadruplo del rettangolo contenuto dalle rette medesime (fig. 69).

Dim. Sia AC la somma delle due rette date CO ed AO: fatta $OB = AO$ sarà BC la differenza delle rette medesime. Dico che il quadrato di AC meno il quadrato di BC è uguale al quadruplo rettangolo di OC in AO.

Sopra AC si descriva il quadrato $ACDE$, si prenda $AF = AB$, e si tiri FG parallela ad AC, e BH parallela a DC, ed OK parallela alla stessa DC. Il rettangolo $KOCG$ ha per base OC, e per altezza $OK = AF = AB = 2AO$; e per conseguenza è doppio del rettangolo di OC in AO. Ma per la proposizione 97 (pag. 76) il rettangolo $IBCG$ è ugnale al rettangole $EFIH$, ed il rettangolo $KOBI$ è uguale al rettangolo $FAOK$, perchè hanno eguali basi e la stessa altezza; dunque il rettangolo $KOCG$ è uguale alla somma de' due rettangoli $EFIH$, e $FAOK$, onde questa somma sarà eguale al doppio rettangolo di OC in AO; e però se dal quadrato $ACDE$ si toglie la figura $HIGD$, cioè il quadrato di BC, lo spazio rimanente sarà equivalente al quadruplo rettangolo di OC in AO. Il che bisognava dimostrare.

Euclide enuncia il teorema precedente come segue.

» Se una linea retta OC sia segata in qualunque modo; il rettangolo con-
» tenuto quattro volte da tutta la linea e da una delle parti OB insieme col
» quadrato dell'altra parte BC, sarà eguale al quadrato di AC che si fa da
» tutta la linea OC, e dalla detta parte OB, siccome da una linea sola.

Questa enunciazione sfugge facilmente dalla memoria; ed oltre a ciò la dimostrazione, che si legge in Euclide, è una delle più lungho e delle più intricate fra quelle che trovansi nel lib. 2 degli elementi di quel geometra.

INDICE

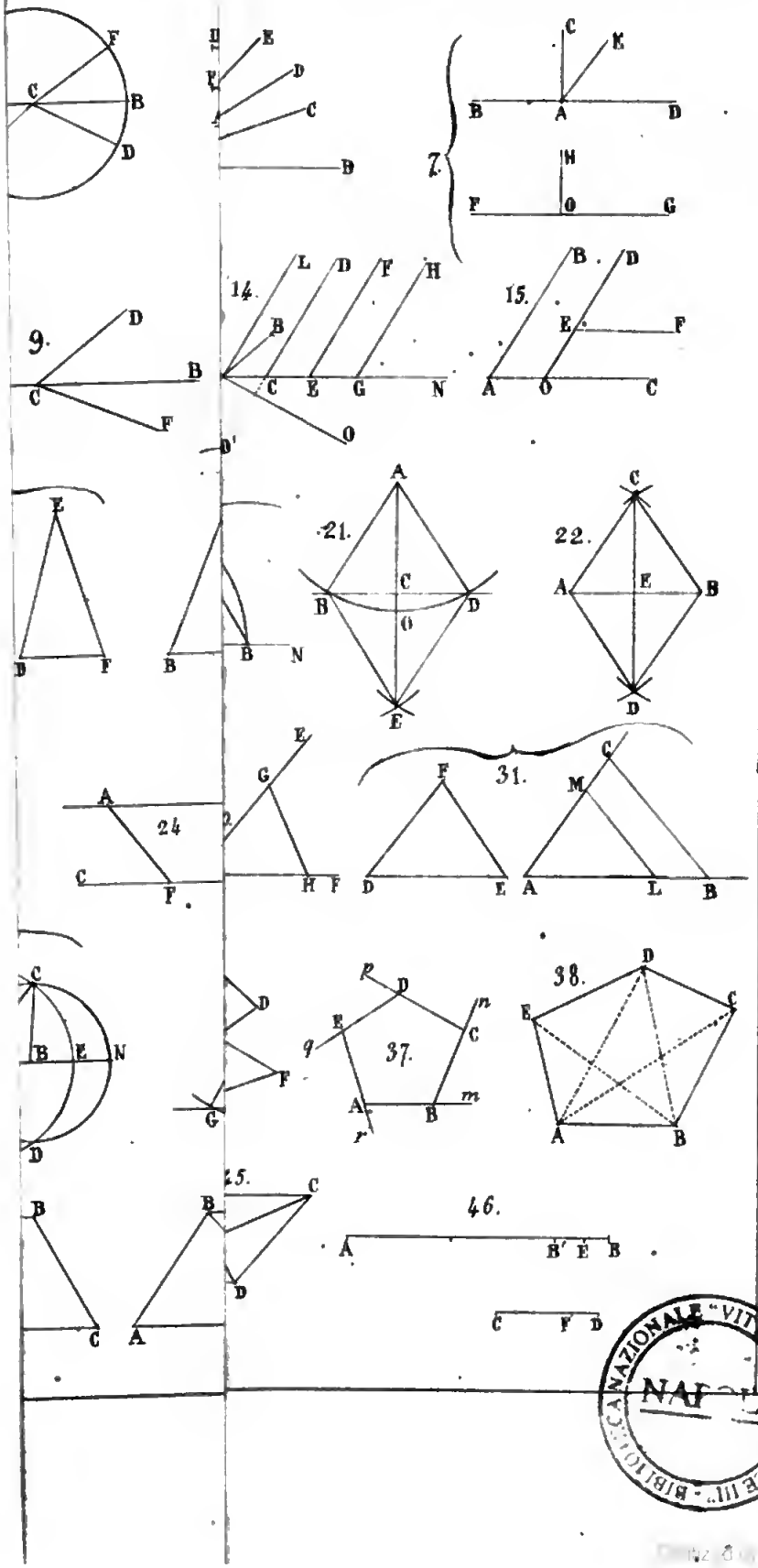
Cap.	I.	Definizioni, e nozioni preliminari. . . pag.	1
		Spiegazione di alcuni termini	3
		Degli assiomi	4
		De' postulati	5
Cap.	II.	Delle rette che s' incontrano, e delle rette parallele.	7
		Degli angoli.	8
		Delle rette parallele	11
Cap.	III.	Dei triangoli	15
		Caratteri dell' eguaglianza de' triangoli . . .	16
Cap.	IV.	Risoluzione di alcuni problemi	19
Cap.	V.	Proprietà de' triangoli.	22
		Applicazione delle proprietà precedenti allarisoluzione di alcuni problemi.	27
Cap.	VI.	De' poligoni.	29
		Delle condizioni che determinano i poligoni . .	32
Cap.	VII.	De' quadrilateri.	34
		Proprietà de' parallelogrammi	35
Cap.	VIII.	Delle ragioni e delle proporzioni in generale. .	37
		Della ragione	38
		Della proporzione	44
		Della ragione composta	52
Cap.	IX.	Della misura delle aje de' poligoni, e de' rapporti che ne derivano.	55
Cap.	X.	Della proporzionalità de' lati de' triangoli. Teorica delle figure simili	64
		Linee proporzionali	65
		Caratteri della simiglianza de' triangoli . . .	67
		Proprietà del triangolo rettangolo	70
		De' poligoni simili.	73

Cap. XI. Dei quadrati e dei rettangoli formati sulle linee. 75
Dei quadrati e de' rettangoli delle linee variamente divise 76
De' quadrati fatti sopra i lati de' triangoli obliquangoli 78
Cap. XII. Applicazione de' principi contenuti ne' due capitoli precedenti alla risoluzione di alcuni problemi 81
Cap. XIII. Delle proprietà del cerchio 86
Degli archi e delle corde 88
Della misura degli angoli. 90
Delle tangenti e delle secanti del cerchio . . . 93
Delle intersezioni e de' contatti de' cerchi. . . 96
Applicazione delle proprietà precedenti alla risoluzione di alcuni problemi. 100
Cap. XIV. Dei poligoni iscritti e circoscritti al cerchio . . 103
Cap. XV. Della misura del cerchio. 110
Della rettificazione della circonferenza e degli archi del cerchio. 115

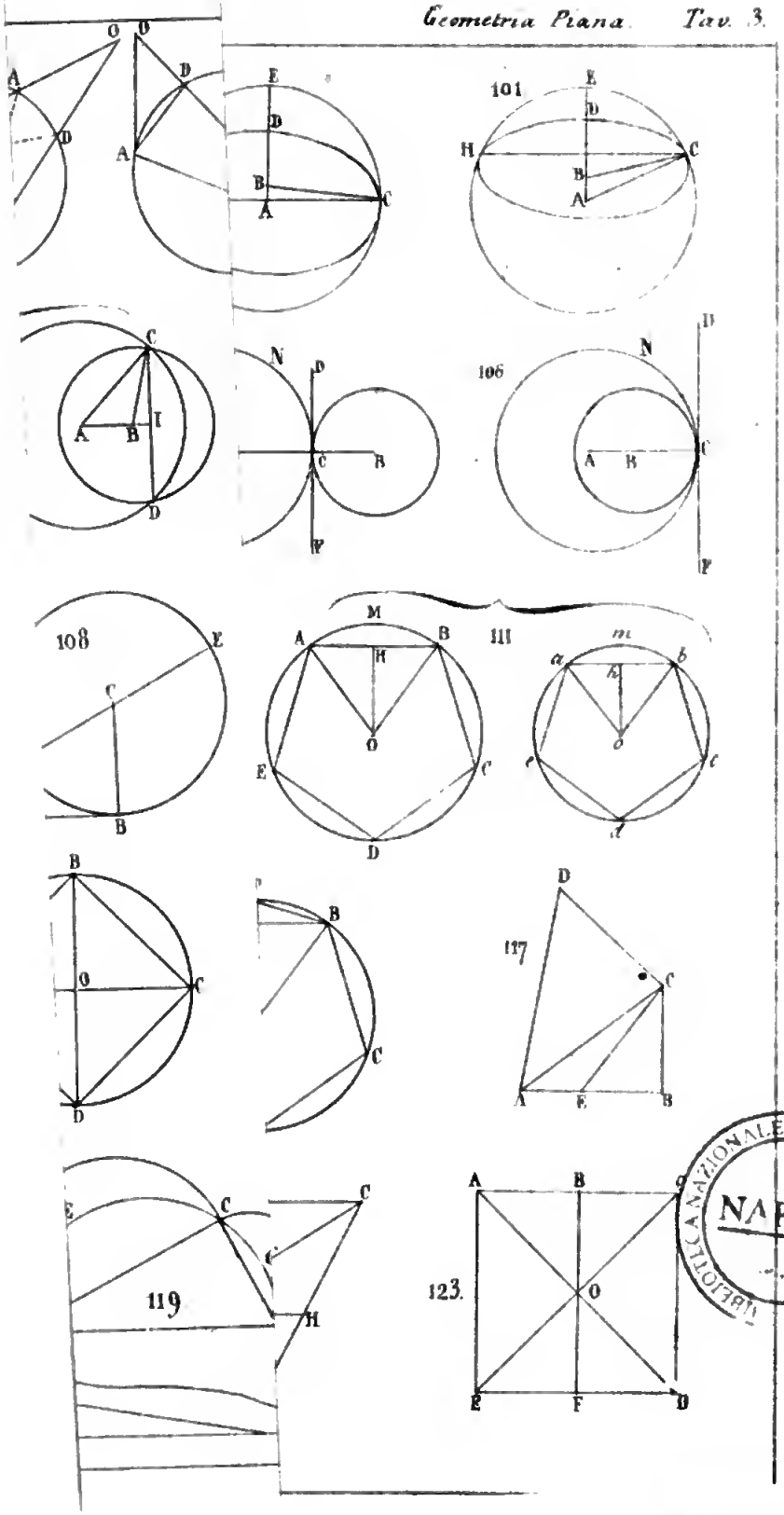
SBN 643481

Digitized by Google

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Digitized by Google

CATECHISMO

DI

MATEMATICHE PURE

AD USO DEGLI STUDI GENERALI

Parte prima—Sezione seconda

GEOMETRIA SOLIDA

Digitized by Google

648482

GEOMETRIA SOLIDA

DI

CARLO ROCCO

PROFESSORE DI MATEMATICA NEL R. COLLEGIO MILITARE,
SOCIO DELL' ACCADEMIA PONTANIANA.

TERZA EDIZIONE

RIVEDUTA, CORRETTA ED ACCRESCIUTA

Mathesis philosophiae, et scientiis
initia, ac veluti mammam praebet.
BACONE

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

NAPOLI
DALLO STABILIMENTO DEL GUTTEMBERG
1846

Gli esemplari, che non portano la firma dell'Autore, sono contraffatti.

PREFAZIONE

La geometria solida tratta dei piani, e degli angoli solidi; dei poliedri o solidi terminati da superficie piane; e finalmente dei tre corpi rotondi, vale a dire del cono retto, del cilindro retto, e della sfera. Quindi in questa terza edizione abbiam stimato di dividere la nostra istituzione di geometria solida in tre libri analogamente a ciò che abbiam fatto nella quarta edizione della geometria piana, che pure è stata divisa in tre libri. La divisione in capitoli è rimasta come era nelle due edizioni precedenti, vale a dire che ogni capitolo contiene una particolare teorica, senza miscugli. In tal modo si evita il grave inconveniente di disporre le proposizioni ad arbitrio, con la sola condizione di mantenere l'esattezza delle dimostrazioni; inconveniente che si osserva nei più celebri scrittori di elementi geometrici.

Nelle due edizioni precedenti esponemmo la teorica compiuta degli angoli solidi triedri: in questa abbiamo leggiermente modificata la dimostrazione della proposizione, che riguarda l'eguaglianza degli angoli diedri, quando gli angoli piani di due angoli solidi triedri sono rispettivamente uguali; e ci sembra che quella fondamentale proposizione sia ora dimostrata col più grande rigore possibile. La dimostrazione di Legendre, o piuttosto di Roberto Simson, non è generale, perchè suppone tacitamente che due degli angoli piani sopraccennati siano acuti; e per conseguenza la teorica degli angoli solidi vacillava nelle fondamenta. Oltre a ciò si troveranno in questa edizione messe al loro posto le condizioni che determinano gli angoli solidi poliedri, senza miscuglio di problemi ausiliarj, che si trovano in Legendre; e però, se non c'inganniamo, la teorica degli angoli solidi in generale trovasi esposta in un modo compiuto, almeno per quanto spetta alla parte elementare della scienza.

La teorica dei poliedri è monca ed imperfetta in Euclide, come tutti sanno; e come doveva essere, perchè ai tempi di questo geometra la teorica degli angoli solidi era nell'infanzia. I geometri moderni, e soprattutto Legendre, l'hanno perfezionata ed ingrandita; purtuttavolta il sistema di Euclide era rimasto inalterato, in quanto alla sostanza delle cose. Non si era ridotta la teorica dei poliedri a quella della piramide triangolare; e però bisognava passare per una serie di proposizioni relative ai parallelepipedi, le quali riescono difficili ad apprendersi ed a ritenersi dagli studiosi, come è noto a tutti quelli che hanno pratica dell'insegnamento della geometria. Per levare queste difficoltà fummo obbligati a rifare quasi dalle fondamenta la teorica dei poliedri, mettendo a profitto le meditazioni degli antichi e de' moderni geometri, non che le nostre, qualunque esse siano.

In questa terza edizione il solo cangiamento, che si osserverà è relativo alla proposizione, in cui si tratta di esprimere in linee il rapporto di due poliedri dati. All'antica dimostrazione si è sostituita un'altra, che abbiam trovata più facile nell'insegnamento.

La teorica dei tre corpi rotondi è rimasta come era nelle due edizioni precedenti; solamente si osserveranno quà e là alcune giunte e modificazioni, che servono a rendere più chiare le dimostrazioni. Siffatte giunte e modificazioni si troveranno soprattutto nell'ultimo capitolo, che tratta dei triangoli sferici. Ci limiteremo quì a citare le proposizioni relative alla misura della piramide sferica, e dell' angolo solido, che trovasi accennata nella geometria di Legendre, ma non dimostrata. Fiuck, geometra francese, ha procurato di riempiere una siffatta lacuna nei suoi elementi di geometria; ma, se non andiamo errati, i principj, dai quali è partito, avevano bisogno per lo meno, di esser messi fuori di ogni dubbio perciò che spetta alla misura dell'angolo solido. Ci sembra di esser riusciti a togliere di mezzo ogni difficoltà intorno alla suddetta misura; in guisa che la nostra istituzione di geometria solida può ora considerarsi come compiuta.

In una lunga nota, messa alla fine del libro nella prima edizione, e nella prefazione alla seconda edizione esponemmo le ragioni, che ci avevano indotti a prescegliere il metodo degl'infinitamente piccoli nelle dimostrazioni relative alla misura delle superficie, e delle solidità dei tre corpi rotondi, mettendo da banda le pesanti e tortuose dimostrazioni di Maurolico, che sono state adottate da Legendre, e da qualche traduttore di Euclide, non che quelle dei limiti, che si trovano in Lacroix, ed in alcuni altri scrittori di elementi geometrici. Qui ci limiteremo a fare alcune altre osservazioni.

Il metodo degl'infinitamente piccoli, quando venga adoperato

come si conviene, è tanto esatto quanto quello di esaustione adoperato da Archimede, e quello de'limiti; perocchè questi tre metodi poggiano sopra una medesima base (*). Se dunque si adoperi il metodo degl'infinitamente piccoli in modo che le dimostrazioni fatte con esso si possano tradurre in quelle fatte col metodo de'limiti, o di esaustione, cambiando le frasi, ed introducendo le opportune costruzioni, esse dimostrazioni avranno tutto il rigore possibile; ed oltre a ciò avranno il prezioso vantaggio d'imprimersi facilmente nella memoria, e di conservare le tracce dell'invenzione. Ed ecco perchè alcuni de'più recenti scrittori francesi di elementi di geometria hanno scelto a preferenza il metodo degl'infinitamente piccoli, che hanno adoperato nel modo sopraccennato, e non già come avevano fatto Caravelli, Niccolò de Martino, Bezout, ed altri elementisti, le dimostrazioni dei quali non si possono tradurre in quelle fatte col metodo dei limiti, o di esaustione, perchè partono da principj vaghi, e non da quelli che servono di base comune ai tre metodi. Quindi in questa terza edizione abbiam conservato il metodo degl'infinitamente piccoli nelle dimostrazioni relative alla misura delle superficie e delle solidità dei tre corpi rotondi; dando ad esse una forma tale che ognuno potrebbe, volendo, facilmente tradurre in quelle fatte col metodo de'limiti, ed anche di esaustione; perchè, ripetiamo, il punto di partenza dei tre metodi è lo stesso.

Ma a malgrado la chiarezza delle precedenti ragioni, di quelle da noi dette nelle due precedendi edizioni, e di altre che uomini di miglior ingegno del nostro hanno detto, o potranno dire, la forza di un'antica tradizionale opinione fa sì che alcuni, che non hanno mai conosciuto lo spirito dei metodi, persistono ad essere immobilmente attaccati alle antiche forme di ragionamento, e non vogliono ammettere che la considerazione dell' infinito possa introdursi senza maschera negli elementi di geometria. Ad imitazione degli antichi Pittagorici, de' quali fa menzione uno scoliaste di Euclide alla fine del libro X di questo geometra, gridano la croce addosso a chi fa uso di quella considerazione, a fine di render piana e facile la istituzione geometrica; e non hanno per buona una dimostrazione, se non quando conserva una cert' aria di mistero, e sia appoggiata a lunghi e difficili ragionamenti, che facciano la disperazione degli giovani studiosi.

Questi geometri trascendentali credono profanata la scienza, quante volte le dimostrazioni relative alla misura delle superficie e delle solidità dei tre corpi rotondi, non sono fatte con quei giri

(*) Methodus, quam exhaustionum vocant, *eodem fundamento innititur*, quo methodus infinitesimalis, sed multo est implicatior et longior.
Boscovich, T. I. pag. 164.

tortuosi, e con quello apparato di proposizioni preparatorie, che s'incontrano nelle dimostrazioni di Maurolico, le quali erano eccellenti nel tempo, in cui apparvero, perchè più facili di quelle di Archimede, ma ora non possono essere sostenute che dalle sole menti pregiudicate. Ed infatti abbiam provato nelle due edizioni precedenti che le dimostrazioni di Maurolico non si possono giustificare senza ricorrere alla considerazione dell'infinito, che non pertanto si vorrebbe proscrivere dagli elimenti di geometria!

Da questa pregiudicata maniera di vedere le cose risultano non pochi inconvenienti. Imperocchè gli studiosi dopo gli elementi di geometria non sentono più parlare di quelle rancide e viete forme di ragionamento; e s'incontrano a viso scoperto nella considerazione dell'infinito, che con tanta cura si era loro nascosta negli elementi, ed allora insorgono difficoltà, che non essendo state risolute nel luogo opportuno, il maggior numero degli studiosi non apprende che la parte materiale delle Matematiche, come insegna una trista esperienza.

Nè i pregiudizj in fatto d'istituzione geometrica si limitano alla sola considerazione dell'infinito. Vi sono alcuni, i quali non vogliono che s'introduca negli elementi geometrici l'ordine rigoroso delle proposizioni, e quel legame che serve a mostrare tutt'i punti di contatto di esse, ed a produrre nella mente una piena acquiescenza! Nella opinione di questi sapienti il disordine nelle proposizioni, ed il pesante e dommatico apparato nelle dimostrazioni costituiscono il sublime di una istituzione geometrica! Essi pretendono che gli elementi di geometria sono fatti da gran tempo; e che gli studiosi non debbano far altro che imparare come meglio possano quel dato numero di proposizioni, che si è convenuto dover far parte degli elementi geometrici, con la sola condizione di non dipartirsi da quelle dimostrazioni, che l'uso ha consacrato. Con questa specie di armonia prestabilita come si può sperare che quei sapienti approvino tutte quelle innovazioni, che partendo dall'esame profondo dei principj, sui quali poggia la geometria, tendono a renderla più chiara, più rigorosa, e più facile ad apprendersi?

Ed ecco perchè alcuni geometri non trovando la misura delle aje e de'volumi in Euclide, pretendono che debba esser proscritta dagli elementi di geometria; altri al contrario l'ammettono, ma sostengono che debba esser dedotta come conseguenza de'rapporti di quelle aje, e di quei volumi, perchè così la trovano in Legendre, ed in altri moderni scrittori di elementi. Epperò stando ad una siffatta pretensione la misura dell'aja del rettangolo, quella del cerchio, del parallelepipedo rettangolo, del ci-

lindro retto, del cono retto, della sfera, etc.... dovrebbe dedursi dalle proposizioni che danno i rapporti de'rettangoli, de' parallelepipedi, de'cilindri, de'coni, delle sfere, etc.... Ed intanto Archimede, il massimo fra i geometri, ha dimostrato prima che il cerchio ha per misura il prodotto della circonferenza per la metà del raggio; e poi da questo teorema ha dedotto che le circonferenze de' cerchi stanno come i raggi. Parimente ha prima parlato delle misure delle superficie e delle solidità dei tre corpi rotondi, e poi de' rapporti, che hanno fra loro quelle superficie, e quei volumi; e lo stesso Legendre ha seguito questo cammino là dove parla dei tre corpi rotondi. Volendo dunque mantenere l' ordine logico delle idee, bisogna che nella geometria piana e solida si espongano prima i teoremi relativi alle misure delle aje e de'volumi, poi quelli che spettano ai rapporti di quelle aje, e di quei volumi: oppure che si parli prima di questi rapporti, e poi delle misure. Ma fare ora in un modo, ora in un altro ci sembra che nuoccia al regolare andamento dell'istituzione geometrica; e però tanto nella geometria piana, quanto nella solida abbiam tenuto il cammino di Archimede, anche perchè un siffatto cammino serve ad abbreviare le dimostrazioni, soprattutto nella geometria solida. Ciò non ostante siam persuasi che per lungo tempo ancora si continuerà a battere la vecchia strada, perchè è difficile levare i pregiudizj, soprattutto quando hanno un' antica data, onde non spingeremo più oltre le nostre considerazioni, e lasceremo ai dotti la cura di dar giudizio intorno al nostro lavoro.

Digitized by Google

Digitized by Google

GEOMETRIA SOLIDA

LIBRO PRIMO

DE' PIANI E DEGLI ANGOLI SOLIDI.

CAPITOLO PRIMO

DELLA LINEA RETTA E DEL PIANO IN GENERALE

1. La *Geometria Solida* considera l'estensione nelle sue tre dimensioni; per cui le linee rette ed i piani si riguardano come situati in qualsivoglia modo nello spazio. E qui giova ricordarsi che la linea retta è di sua natura indefinita, come pure il piano, abbenchè spesso occorra di dover considerare soltanto una parte limitata dell'una, o dell'altro. Laonde quando si dice che un punto è situato fuori di una linea retta, o fuori di un piano, si deve intendere che il punto accennato trovasi al di sopra, o al di sotto della retta, o del piano; o sia sempre fuori de'loro prolungamenti.

PROPOSIZIONE I — *TEOREMA.*

2. *Una linea retta non può avere una sua parte in un piano, e la rimanente fuori del piano medesimo* (fig. 1).

Dimostrazione. Rappresenti la figura *MN* un piano qualunque, e si supponga che la linea retta *ABD* abbia una parte *AB* nel piano *MN*, e la rimanente *BD* fuori di questo piano. Essendo *AB* una linea retta, essa potrà prolungarsi in *C* nel piano *MN*; per conseguenza le due rette *ABD*, *ABC* avrebbero due punti comuni *A*, e *B* senza coincidere in tutta la loro estensione; ma ciò è impossibile, dunque una linea retta non può avere una parte in un piano, e la rimanente fuori del piano medesimo.

3. *Corollario.* Apparisce da questo teorema che una linea retta

non può incontrare un piano in più di un punto; poichè se lo incontrasse in due punti, dovrebb'essere tutta intera situata nel piano medesimo. Il punto d'incontro di una retta con un piano dicesi il *piede* della retta sullo stesso piano.

PROPOSIZIONE II — *TEOREMA.*

4. *Un triangolo qualunque è situato in un solo piano* (fig. 2).

Dim. Sia *ABC* un triangolo qualunque. Se una sua parte *BDEC* fosse situata in un piano, e la rimanente *DAE* in un altro, la retta *AB* avrebbe una sua parte *BD* nel primo piano, e l'altra *DA* nel secondo; il che non può sussistere (n° 2); dunque un triangolo è sempre in un solo piano.

5. *Corollario.* Si deduce da questo teorema che *per tre punti* A, B, C *non disposti in linea retta passa un solo e medesimo piano.*

Infatti congiungendo i tre punti colle rette *AB*, *AC*, *BC*, il triangolo *ABC* è situato in un solo piano. Quindi per un punto *A* posto fuori di una retta *BC*, e per questa retta medesima si può sempre far passare un piano; poichè basta prendere due punti *B*, e *C* ad arbitrio nella retta accennata, e condurre il piano per i tre punti *A*, *B*, *C*, nè altro piano potrà passare per la data retta e pel punto dato.

PROPOSIZIONE III — *TEOREMA.*

6. *Due rette che s'incontrano sono situate in un medesimo piano* (fig. 3).

Dim. Perocchè, prendendo ad arbitrio due punti *P* e *N* nelle due rette *NM*, e *PQ* che s'incontrano nel punto *F*, e condotta la retta *PN*, le due linee *PF*, e *NF* sono situate nel piano del triangolo *PFN*: per cui anche le rette *MN* e *PQ* dovranno trovarsi nel medesimo piano (n° 2).

PROPOSIZIONE IV — *TEOREMA.*

7. *Una retta che incontra due altre situate in un piano, dovrà trovarsi nel medesimo piano* (fig. 4),

Dim. Infatti, supponendo che la retta *HO* incontri le rette *AB*, e *CD* situate in uno stesso piano, i punti *L*, ed *E* d'incontro si troveranno nel detto piano; e però tutta la retta *HO* dovrà stare nel piano medesimo (n° 3).

PROPOSIZIONE V — *TEOREMA.*

8. *L'intersezione comune di due piani che s'incontrano è una linea retta* (fig. 5).

Dim. Sia *AB* l' intersezione comune di due piani *MN*, e *PQ*. È manifesto che questa intersezione deve essere una linea, ed una linea retta; perciocchè se potesse essere una porzione di superficie, o una linea curva, i due proposti piani avrebbero sempre più di due punti di comune non disposti in linea retta, e si confonderebbero l'uno con l'altro (n°. 5) contro la supposizione; dunque l'intersezione comune di due piani è una linea retta.

9. *Scolio.* I principj fin qui esposti sono, come si è veduto, corollarj manifesti della nozione che abbiamo della linea retta, e del piano; in guisa che si potrebbero considerare quasi come assiomi. Essi sono della più grande importanza, perchè sopra siffatti principj semplicissimi è stabilita tutta la geometria solida.

Or siccome nella geometria piana la prima cosa che abbiamo considerata è stato l'incontro, o il non incontro delle rette situate in un piano, così pure nella geometria solida la prima cosa da considerarsi dovrà essere l'incontro, o il non incontro delle linee rette con i piani, e l'incontro, o il non incontro dei piani fra loro, senza che lo spazio rimanga chiuso da per ogni dove.

CAPITOLO II.

DELLE RETTE PERPENDICOLARI, ED OBLIQUE AI PIANI.

10. Per una medesima linea retta *AP* (fig. 6) può passare una infinità di piani differenti; dappoichè un piano può girare intorno di una linea retta condotta in esso comunque, e prendere in questo modo un numero infinito di situazioni diverse senza che i punti della retta cangiano sito. Ciò premesso, si facciano passare per la retta *AP* due piani differenti *APB*, ed *APC*, indi da un medesimo punto *P* di questa retta si conducano sopra *AP* le perpendicolari *PB*, *PC*, l'una nel piano *APB*, e l'altra nel piano *APC*. Or queste due perpendicolari determinano la posizione di un piano *MN*, poichè s' incontrano nel punto *P* (n° 6), per conseguenza riesce naturale il ricercare se tirando pel punto *P* nel medesimo piano *MN* una qualunque altra retta *PD*, questa sia pure perpendicolare ad *AP*.

PROPOSIZIONE VI — *TEOREMA.*

11. *Se una retta* AP *è perpendicolare a due rette* PB, PC *che s' intersegano nel suo piede* P *nel piano* MN, *essa sarà perpendicolare a qualsivoglia retta* PD *condotta pel punto* P *nel piano medesimo* (fig. 6).

Dim. Si prolunghino le rette *PB*, *PC*, *PD*, verso *H*, *E*, *F*, si prenda *PB* uguale a *PH*, *PC* uguale a *PE*, e si tirino le rette *BC*, *EH*; indi da un punto *A* della perpendicolare *AP* si conducano le rette *AB*, *AH*, *AC*, *AE*, *AD*, *AF*.

Poichè l'angolo *BPC* è uguale al suo verticale *EPH*, il triangolo

BPC sarà uguale al triangolo *EPH*; per conseguenza si avrà *BC*= *EH*, e l' angolo *PCD*=*PEF*. Or essendo di più l'angolo *DPC* uguale al suo verticale *EPF*, ed il lato *PC*=*PE*, ne segue che il triangolo *DPC* è uguale al triangolo *EPF*; e perciò risulta *PD*= *PF*, e *DC*=*EF*. Da un'altra parte nel piano *ABH* le oblique *AB*, *AH* sono uguali come equidistanti dalla perpendicolare *AP*, e lo stesso deve dirsi delle oblique *AC*, *AE* nel piano *ACE*, dunque i triangoli *ABC*, *AEH* sono equilateri fra loro, e però l'angolo *ACD* è uguale all'angolo *AEF*. Quindi i due triangoli *AEF*, *ACD* hanno un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali, per cui sono uguali, ed il lato *AD* è uguale al lato *AF*. Finalmente i triangoli *APD*, *APF* risultano equilateri fra loro, e però l'angolo *APD* sarà uguale all' angolo *APF*, ovvero *AP* è perpendicolare a *PD*.

12. *Definizione*. Una retta dicesi *perpendicolare* ad un piano quando è perpendicolare a tutte le rette che passano pel suo piede in questo piano; poichè in tal caso forma angoli adiacenti uguali con tutte le rette accennate.

Reciprocamente, un piano si dice perpendicolare ad una retta, allorchè contiene tutte le perpendicolari condotte a questa retta per un medesimo punto di essa.

13. *Corollario*. Apparisce da questa proposizione che

Se l'angolo retto APC *gira intorno ad un suo lato* AP *supposto immobile*, *l' altro lato* PC, *che non cesserà di essere perpendicolare ad* AP, *descriverà nel suo movimento il piano* MN *perpendicolare ad* AP (fig. 6).

Infatti, supponendo che il lato mobile *PC* sia giunto in *PB*, il piano che passa per queste due rette è determinato, e la retta *PC* in tutte le sue posizioni non potrà mai trovarsi fuori di questo piano, perchè tutte le rette che si conducono pel punto *P* nel piano *MN* sono perpendicolari ad *AP*, e quindi coincidono con le varie posizioni del lato mobile *PC*.

PROPOSIZIONE VII — *TEOREMA*.

14. *Per un punto dato non si può condurre ad un piano che una sola perpendicolare* (fig. 7).

Dim. Sia *A* un punto situato fuori del piano *MN*, e si supponga, se è possibile, che le rette *AP*, *AD* sieno due perpendicolari a questo piano; indi si conduca la retta *PD*. Nel triangolo *APD* vi sarebbero due angoli retti; il che è assurdo; dunque dal punto *A* non si può abbassare sul piano *MN* che una sola perpendicolare.

Se poi il punto dato è *P* nel piano *MN*, e si supponga che le rette *PA*, *PE* sieno due perpendicolari al piano medesimo, allora facendo passare per le dette perpendicolari un piano che tagli il piano *MN* secondo la retta *PD*, gli angoli *APD*, *EPD* sarebbero retti

ambidue; e però la parte sarebbe uguale al tutto, il che non può sussistere. Dunque per un punto dato non si può condurre ad un piano che una sola perpendicolare.

PROPOSIZIONE VIII — *PROBLEMA.*

51. *Per un punto* A *situato fuori di un piano* MN *abbassare una perpendicolare sopra questo piano.* (fig. 8).

Soluzione. Si conduca una retta *BC* nel piano *MN*, per questa retta e pel punto *A* si faccia passare un piano (n. 5), indi in questo si abbassi sopra *BC* la perpendicolare *AD*, e dal punto *D* si conduca nel piano *MN* la retta *DP* perpendicolare a *BC*. Finalmente si faccia passare un piano per le rette *AD*, *DP*, ed in questo piano si cali sopra *DP* la perpendicolare *AP*, questa sarà perpendicolare al piano *MN*.

Infatti, si prenda *BD*=*CD*, e si tirino le rette *PB*, *PC*, *AB*, *AC*. il quadrato di *AB* è uguale ai quadrati di *AD*, e *DB*, perchè è retto l'angolo *ADB*; ma per la stessa ragione il quadrato di *AD* è uguale alla somma de' quadrati di *AP*, e di *PD*, dunque sarà il quadrato di *AB* uguale alla somma dei tre quadrati di *AP*, *PD*, *DB*, ovvero de'quadrati di *AP*, *PB*, perchè è retto l'angolo *PDB*. Sicchè l'angolo *APB* è retto, e nello stesso modo potendo dimostrarsi che l'angolo *APC* è retto, ne segue che *AP* è perpendicolare al piano *MN* (n° 11).

PROPOSIZIONE IX — *TEOREMA.*

16. *Se da un punto* A *situato fuori di un piano MN si conducano sopra questo piano la perpendicolare* AP, *e differenti oblique* AB, AD, AC, AE, ecc.

1.° *La perpendicolare sarà più corta di ogni obliqua.*

2.° *Le oblique equidistanti dalla perpendicolare saranno uguali fra loro.*

3.° *Di due oblique qualunque, quella che più si allontana dalla perpendicolare sarà la più lunga* (Fig. 6)

Dim, Infatti, se si conducano le rette *PB*, *PD*, *PC*, *PE*, ecc.; e si facciano girare gli angoli retti *APC*, *APD*, *APE*, ecc: intorno ad *AP*, tutte le oblique potranno ridursi ad essere situate in un medesimo piano *ABH*; e per conseguenza il teorema proposto si dimostrerà come nella geometria piana (n. 75).

PROPOSIZIONE X — *TEOREMA.*

17. *Se da un punto* A *della retta* AD *obliqua al piano* MN *si abbassi la perpendicolare* AP *sopra questo piano, e si conduca la retta* DP, *l'obliqua* AD *sarà perpendicolare alla retta* BC *tirata perpendicolarmente a* DP *nel piano* MN (fig. 8).

Dim. Si prenda $BD = CD$, e si tirino le rette PB, PC, AB, AC, Essendo $BD = CD$, le oblique PB, PC saranno uguali perchè equidistanti dalla perpendicolare PD. Parimente le oblique AB, AC saranno uguali come equidistanti dalla perpendicolare AP, dunque rispetto ad AD le rette AB, AC sono due oblique uguali, ed equidistanti, e per conseguenza AD è perpendicolare a BC.

Corollario. Essendo la retta BC perpendicolare alle due rette DP, e DA, sarà perpendicolare al piano APD che passa per le rette medesime (n. 11).

PROPOSIZIONE XI — *PROBLEMA.*

19. *Da un punto* D *situato nel piano* MN *innalzare una perpendicolare sopra questo piano* (fig. 9).

Sol. Da un punto A situato fuori del piano MN si abbassi sopra questo piano la perpendicolare AP, e si conduca la retta PD; indi si faccia passare per le rette AP, PD un piano, nel quale si tiri la retta DE perpendicolare a DP, sarà DE la perpendicolare richiesta. Infatti, se si conduca la retta BC perpendicolarmente a DP nel piano MN, l'angolo EDB sarà retto ; perchè BD è perpendicolare al piano $APDE$ (n. 18), e per conseguenza a tutte le rette che sono in esso come la DE. Ma per costruzione è retto l'angolo EDP, dunque la retta ED è perpendicolare alle due rette DP, DB, e però è perpendicolare al piano MN.

PROPOSIZIONE XII — *PROBLEMA.*

20. *Per un punto* O *di una retta* AE *condurre un piano perpendicolare a questa retta* (fig. 10).

Sol. Si facciano passare per la retta data due piani qualunque. In uno di questi piani si conduca la retta OB perpendicolare ad AE; e nell'altro la retta OC anche perpendicolare ad AE. Finalmente per le rette OB, OC si faccia passare un piano MN, questo sarà perpendicolare alla retta data (n° 12); poichè essendo AO perpendicolare alle due rette OB, OC, dev'essere perpendicolare al piano determinato da queste rette.

PROPOSIZIONE XIII — *PROBLEMA*

21. *Per un punto* B *situato fuori di una retta* AE *condurre un piano perpendicolare a questa retta* (fig. 10)

Sol. Pel punto dato B e per la retta AE si conduca un piano, nel quale si abbassi BO perpendicolare sopra AE; secondo questa ultima retta si conduca un altro piano qualunque. ed in essa s'innalzi OC perpendicolare ad AE. Finalmente per le rette BO, ed OC si faccia

passare un piano, questo sarà il piano richiesto; poichè contiene *BO*, ed *OC* ambedue perpendicolari ad *AE*.

CAPITOLO III.

DELLE RETTE PARALLELE FRA LORO, E DELLE RETTE PARALLELE AI PIANI.

22. Nella proposizione X (fig. 9) si è veduto che le rette *BC*, *AP*, situate l'una nel piano *MN*, l'altra nel piano *APD*, sono perpendicolari ad una medesima retta *DP*. Or è da osservarsi che quantunque queste due perpendicolari non possano incontrarsi, pure non si dicono *parallele*: dappoichè si è convenuto di chiamar esclusivamente *rette parallele* quelle ch' essendo situate in un medesimo piano non s' incontrano mai. Epperò quando si mette per ipotesi che due rette date sono parallele, si sottintende implicitamente che sono poste in un medesimo piano. Da ciò ne consegue che *Due rette parallele determinano la posizione di un piano.*

23. *Definizione.* Una retta si dirà essere *parallela* ad un piano, allorchè prolungandosi l'una e l'altro non s'incontrano mai.

PROPOSIZIONE XIV — *TEOREMA.*

24. *Se due rette* AP, ED *sono parallele, ed una di esse è perpendicolare ad un piano* MN, *anche l'altra sarà perpendicolare al medesimo piano* (fig. 9).

Dim. Sia *AP* perpendicolare al piano *MN*: si tirino le rette *PD*, *AD*, e nel piano *MN* si conduca a *DP* la perpendicolare *BC*, questa sarà pure perpendicolare al piano *APD* (n° 18), ovvero al piano *APDE* delle parallele *AP*, *DE*. Quindi sarà retto l'angolo *EDB*; ma in virtù delle medesime parallele è anche retto l'angolo *EDP*, dunque la retta *ED* è perpendicolare alle due *DB*, *DP*, e per conseguenza al piano *MN*.

PROPOSIZIONE XV — *TEOREMA.*

25. *Due rette* AP, ED *perpendicolari ad un medesimo piano* MN *sono parallele fra loro* (fig. 9).

Dim. Perocchè, se *ED* non è parallela ad *AP*, si conducano le rette *PD*, *AD*, e nel piano *APD* si tiri pel punto *D* una retta parallela ad *AP*, la quale sarà perpendicolare al piano *MN* (n° 24). Ma per ipotesi anche *DE* è perpendicolare ad *MN*; dunque si potrebbero innalzare dal punto *D* due perpendicolari ad un medesimo piano; il che è assurdo; e però *ED* è parallela ad *AP*.

26. *Corollario.* Segue da questo teorema che per un punto *P* preso fuori di una retta *ED* non si può condurre a questa retta che

una sola parallela *PA*. Infatti, pel punto *P* si faccia passare un piano *MN* perpendicolare alla retta *DE* (n° 20); se pel punto *P* si potesse condurre a *DE* un'altra parallela, questa sarebbe perpendicolare al piano *MN*, ed allora per uno stesso punto si potrebbero innalzare due perpendicolari al piano *MN*, il che non può sussistere.

PROPOSIZIONE XVI — *TEOREMA*.

27. *Per un punto dato condurre una parallela ad una retta data* (fig. 9).

Sol. Sia *P* il punto dato, e *DE* la retta data; per questo punto e la retta accennata si faccia passare un piano, nel quale si conduca *PA* parallela a *DE*, è manifesto che *PA* sarà la parallela richiesta.

PROPOSIZIONE XVII — *TEOREMA*.

28. *Due rette* AB, DF *parallele ad una terza* CE *sono parallele fra loro* (fig. 11).

Dim. Per un punto *E* della retta *CE* si conduca un piano perpendicolare a questa retta (n° 20), le rette *AB*, *DF* essendo per ipotesi parallele a *CE*, saranno perpendicolari al piano *MN* (n° 24). e però saranno parallele fra loro.

29. *Scolio*. Il teorema analogo; cioè quando le tre rette sono situate in un medesimo piano è stato dimostrato nella geometria piana (n° 48).

PROPOSIZIONE XVIII — *TEOREMA*.

30. *Se una retta* AB *situata fuori di un piano* MN *è parallela ad una retta qualunque* CD *condotta in questo piano, essa sarà parallela al piano medesimo* (fig. 12)

Dim. Essendo parallele le rette *AB*, *CD*, saranno situate in un medesimo piano *ABCD*, per conseguenza se *AB* prolungata incontrasse il piano *MN*, dovrebbe ancora incontrare la retta *CD*, contro la snpposizione; dunque *AB* è parallela al piano *MN*.

CAPITOLO IV.

DEI PIANI PARALLELI FRA LORO.

31. *Definizione*. Due piani si dicono *paralleli*; allorchè prolungati indefinitamente non possono incontrarsi.

PROPOSIZIONE XIX — *TEOREMA*.

32. *Due piani* MN, PQ *perpendicolari ad una medesima retta* AB *sono paralleli fra loro* (fig. 13).

Dim. Perocchè se i due piani non sono paralleli, prolungati sufficientemente dovranno incontrarsi: sia *O* un punto della loro comune intersezione, e da questo punto si tirino le rette *OA*, *OB*, che giaceranno nei piani. Essendo per ipotesi la retta *AB* perpendicolare ai due piani, gli angoli *OAB*, *OBA* saranno retti (n° 11); per conseguenza nel triangolo *OAB* vi sarebbero due angoli retti; il che è assurdo; dunque i due piani sono paralleli.

PROPOSIZIONE XX — *TEOREMA.*

33. *Le intersezioni* AB, CD *di due piani paralleli* MN, PQ *con un terzo piano* ABCD *sono parallele fra loro* (fig. 12).

Dim. Infatti, se *AB* potesse incontrare *CD*, il punto d'incontro dovrebbe trovarsi nei due piani *MN*, *PQ*: ma per ipotesi questi due piani sono paralleli, e perciò non possono avere alcun punto comune, dunque anche *AB* è parallela a *CD*.

PROPOSIZIONE XXI — *TEOREMA.*

34. *Se due piani* MN, PQ *sono paralleli, ogni retta* AB *perpendicolare all' uno è ancora perpendicolare all' altro* (fig. 13)

Dim. Sia *AB* perpendicolare al piano *PQ*; si conduca una retta *BC* comunque nel piano medesimo, poi per le due *AB*, *BC* si faccia passare un piano che tagli il piano *MN* secondo la retta *AD*. Essendo per ipotesi paralleli i due piani *MN*, *PQ*, le intersezioni *AD*, *BC* di questi piani col piano *DABC* saranno parallele (n. 33); ma *AB* è perpendicolare a *BC*, perchè si è supposta perpendicolare al piano *PQ*, dunque *AB* sarà ancora perpendicolare ad *AD*; e siccome per ipotesi *BC* è una retta qualunque, ne segue che *AB* è perpendicolare a tutte le rette che passano pel suo piede *A* nel piano *MN* ovvero è perpendicolare a questo piano.

35. *Corollario* I. Da questo teorema s'inferisce che per un punto *B* situato fuori di un piano *MN* non si può condurre che un solo piano parallelo al piano *MN*. Perocché, se si potessero condurre due piani paralleli, essi sarebbero ambidue perpendicolari alla retta *AB* abbassata dal punto *B* perpendicolarmente sopra il piano *MN*; ed in tal caso per un punto di una retta si potrebbero innalzare due piani perpendicolari alla retta medesima, il che non può sussistere, (n. 35).

36. *Corollario* II. *Due piani paralleli ad un terzo piano sono paralleli fra loro*: perocchè se s'incontrassero, da un punto della loro comune intersezione si potrebbero condurre due piani paralleli ad un altro piano; il che è impossibile (n. 35).

PROPOSIZIONE XXII — *PROBLEMA*

37. *Per un punto dato* B *condurre un piano parallelo ad un piano* MN (fig. 13).

Sol. Dal punto *B* si abbassi sopra il piano *MN* la perpendicolare *BA*, indi pel medesimo punto si conduca un piano *PQ* perpendicolare alla retta *BA* (n. 20), è manifesto che *PQ* sarà il piano richiesto (n. 32)

PROPOSIZIONE XXIII — *TEOREMA.*

38. *Le rette parallele* AC, BD *comprese fra i piani paralleli* MN, PQ *sono uguali fra loro* (fig. 12.)

Dim. Infatti, essendo *AC* parallela a *BD*, esse saranno situate in un medesimo piano *ABDC*, di cui le intersezioni con i piani *MN*, *PQ* sono parallele (n.33). La figura *ABDC* è dunque un parallelogrammo ; e però si avrà $AC = BD$.

39. *Corollario.* Da questo teorema si deduce che

Due piani paralleli sono equidistanti fra loro.

Infatti, se due rette *AC*, *BD* sono perpendicolari ai piani (fig. 12) *PQ*, *MN*, ciascuna di esse sarà la più corta distanza di questi piani, perchè ogni obliqua sarebbe più lunga.

PROPOSIZIONE XXIV — *TEOREMA.*

40. *Due rette comprese fra tre piani paralleli sono divise in parti proporzionali* (fig. 14.)

Dim. Sieno le rette *AB*, *CD* comprese fra tre piani paralleli *MN*, *PQ*, *RS*; si tiri la retta *AD* che incontri il piano *PQ* nel punto *G*: indi si conducano le rette *AC*, *EG*, *FG*, *BD*.

Le intersezioni *EG*, *BD* dei piani paralleli *PQ*, *RS* col piano *ABD* essendo parallele (n. 33), le rette *AB*, *AD* saranno divise in parti proporzionali nei punti *E*, *G*, e però la ragione di *AE* ad *EB* sarà uguale a quella di *AG* a *GD*. Parimente essendo *AC* parallela a *GF*; sarà la ragione di *AG* a *GD* uguale a quella di *CF* a *FD*; ma due ragioni uguali ad una terza sono uguali fra loro, dunque, $AE : EB :: CF : FD$.

CAPITOLO V.

DEGLI ANGOLI CHE LE RETTE FANNO TRA LORO NELLO SPAZIO, E DEGLI ANGOLI CHE FORMANO CON I PIANI.

41. Quando due rette si tagliano nello spazio, esse determinano un piano; per conseguenza tutto ciò che si è dimostrato nella geometria piana intorno agli angoli formati da due rette sopra un piano può applicarsi agli angoli formati da due rette che si tagliano nello spazio. Qui dunque esporremo ciò che riguarda gli angoli che non sono situati nello stesso piano.

PROPOSIZIONE XXV — *TEOREMA.*

42. *Se due angoli non situati nello stesso piano hanno i lati respettivamente paralleli e rivolti dalla stessa parte, essi saranno uguali, ed i loro piani saranno paralleli* (fig. 11).

Dim. Sieno *CAD*. *EBF* due angoli situati l'uno nel piano *PQ*, e l'altro nel piano *MN*; si faccia $AC = BE$, $AD = BF$, e si conducano le rette *AB*, *CE*, *DF*, *CD*. *EF*.

Essendo *AC* uguale e parallela a *BE*, la figura *ABEC* sarà un parallelogrammo ; e però sarà *AB* uguale e parallela a *CE*. Parimente si dimostra che *AB* è uguale e parallela a *DF*, dunque *CE* è uguale e parallela a *DF* (n. 28), onde si avrà $CD = EF$, ed il triangolo *CAD* sarà uguale al triangolo *EBF*; e l'angolo $CAD = EBF$.

In secondo luogo, il piano *CAD* sarà parallelo al piano *EBF*. Infatti, se pel punto *A* si conduca un piano parallelo al piano *BEF*, questi due piani dovranno incontrare le tre rette parallelo *AB*, *CE*, *DF* in modo che le parti di queste rette comprese fra essi sieno uguali. (n. 28); ma *AB*, *CE*, *DF* sono uguali fra loro, dunque il piano parallelo al piano *BEF* deve confondersi col piano *ACD*.

PROPOSIZIONE XXVI — *TEOREMA.*

43. *Se due rette non sono situate in un medesimo piano, saranno sempre situate in due piani paralleli* (fig. 15).

Dim. Sieno le due rette *AB*, *CD* non situate in un medesimo piano; si conduca pel punto *E* la retta *EF* parallela a *CD*, e pel punto *C* la retta *GH* parallela ad *AB*, il piano determinato dall' incontro delle rette *BE*, *EF* sarà parallelo al piano determinato dalle rette *HC*, *CD* (n. 42); per conseguenza le rette *AB*, *CD* saranno situate in piani paralleli.

44. *Scolio.* Quando due rette non sono situate in un medesimo piano, esse non formano angolo propriamente parlando, non ostante volendosi valutare la loro scambievole inclinazione si conduce per un punto di una di esse una retta parallela all'altra, e l'angolo formato dalle due rette misura l'inclinazione richiesta. Se poi una retta incontra un piano senza che sia a questo perpendicolare, essa può avvicinarsi più o meno al piano medesimo, ovvero essere più o meno inclinata a questo piano. La misura di siffatta inclinazione sarà data nel teorema qui appresso.

PROPOSIZIONE XXVII — *TEOREMA.*

45. *L'angolo* ADP *formato dalla obliqua* AD *e dalla retta che unisce il piede* D *della obliqua col piede* P *della perpendicolare* AP *al piano* MN, *misura la inclinazione della obliqua col piano medesimo* (fig. 16).

Dim. Perchè una siffatta misura possa essere legittima, convien dimostrare in primo luogo che l'angolo *ADP* non varia da qualunque punto della obliqua si abbassi la perpendicolare sul piano, ed in secondo luogo che l'angolo medesimo sia il più piccolo di tutti quelli che la obliqua accennata può fare con qualsivoglia altra retta *DC* condotta pel punto *D* nel piano *MN*.

1°. Sia *EF* un'altra perpendicolare abbassata da un punto qualunque *E* della obliqua *AD* sul piano *MN*. Le due rette *AP*, *EF* essendo perpendicolari ad un medesimo piano sono parallele fra loro; e determinano un piano, in cui si ritrova la retta *AD*, poichè una parte *AE* di questa retta si contiene nel detto piano; per conseguenza i punti *P*, *F*, *D* devono ancora trovarsi nel piano medesimo; ma questi stessi punti sono posti nel piano *MN*, dunque essi stanno nella intersezione comune dei due piani; vale a dire sono in linea retta. Laonde qualunque siasi la perpendicolare *EF* abbassata da un punto della obliqua *AD* sul piano *MN*, il suo piede *F* sarà sempre situato sopra la retta *PD*, e per conseguenza l'angolo *ADP* resterà sempre lo stesso.

2°. Si faccia $DC = DF$, e si conduca la retta *EC*; i due triangoli *EDC*, *EDF* hanno due lati respettivamente uguali a due lati, ma il terzo lato *EC* del primo è maggiore del terzo lato *EF* del secondo, perchè *EF* è perpendicolare, ed *EC* è obliqua al piano *MN*, dunque sarà l'angolo *EDC* maggiore dell'angolo *EDF*; e però l'angolo *ADP* sarà il più piccolo di tutti gli angoli che la obliqua *AD* può formare con qualsivoglia altra retta diversa da *DP* nel piano *MN*.

CAPITOLO VI.

DEGLI ANGOLI FORMATI DAI PIANI CHE S'INCONTRANO, OVVERO DEGLI ANGOLI DIEDRI.

46. *Definizione* I. Allorchè due piani *MD*, *CN* (fig. 17) s'incontrano, la quantità più o meno grande di cui l'uno si allontana dall'altro, in quanto alla loro posizione, dicesi *angolo diedro*, cioè angolo a due facce. La comune intersezione *DC* chiamasi *spigolo*, e corrisponde al vertice dell'angolo formato da due linee rette in un piano, mentre le facce *MN*, *CD* corrispondono ai lati di questo medesimo angolo, avvertendo nondimeno che lo spigolo, e le facce dell'angolo diedro si devono considerare sempre come indefiniti.

47. Per indicare un angolo diedro si adoperano comunemente quattro lettere: così volendo indicare l'angolo formato dai piani *MD*, *CN* si dice: l'*angolo diedro MCDN*, avendo cura di mettere in mezzo le due lettere che servono a dinotare lo spigolo. La ragione di ciò è manifesta, dappoichè tre punti bastano a determinare la posizione di un piano, e quindi prendendo una lettera in ciascuna faccia, e due nello spigolo, si vengono a determinare i piani che formano l'angolo diedro. Purtuttavolta è d'avvertirsi che può indicarsi

un angolo diedro nominando soltanto due lettere prese nello spigolo, e perciò in vece di dire; *l'angolo diedro MCDN*, si dirà semplicemente: *l'angolo diedro CD*, come talvolta s' indica un angolo piano rettilineo nominando la sola lettera del suo vertice.

48. *Definizione* II. Se per un punto qualunqne *O* dello spigolo *DC* si conducano due perpendicolari *OB*, *OA* allo stesso spigolo, l'una nel piano *CN*, e l'altra nel piano *MD*, l'angolo *AOB* sarà un angolo piano rettilineo. All'angolo formato in tal guisa si dà il nome di *angolo piano corrispondente all'angolo diedro MCDN*; dappoichè quest'angolo è sempre lo stesso in tutti i punti dello spigolo. Infatti supponendo che le rette *MC*, *KC* sieno perpendicolari allo spigolo *CD*, l'angolo *MCK* sarà uguale all'angolo *AOB*, perchè hanno i lati respettivamente paralleli e rivolti dalla stessa parte (n° 24).

49. È manifesto che un angolo diedro risulta uguale ad un altro angolo diedro, allorchè sovrapponendo una faccia del primo ad una faccia del secondo, e lo spigolo allo spigolo, la rimanente faccia del primo combacia con la rimanente faccia del secondo, precisamente come avviene negli angoli piani rettilinei.

50. *Definizione* III. Un piano dicesi *perpendicolare* ad un altro allorchè forma con questo due angoli diedri adiacenti uguali fra loro. Ciascuno di questi angoli chiamasi *angolo diedro retto*. Si comprende che si debba intendere per *angolo diedro acuto, ed ottuso*.

PROPOSIZIONE XXVIII — *TEOREMA*.

51. *Se due angoli diedri* MCDN, mcdn *sono uguali, gli angoli piani corrispondenti,* AOB, aob *saranno ancora uguali* (fig. 17).

Dim. Si applichi l'angolo diedro *mcdn* sull'angolo diedro *MCDN* in modo che gli spigoli *cd*, *CD* coincidano, come pure le facce *md*, *MD*, e che il punto *o* cada sul punto *O*, il lato *oa* caderà sul lato *OA*, perchè sono retti gli angoli *doa*, *DOA*. Parimente la faccia *cn* dovrà combaciare colla faccia *CN*, e però il lato *ob* caderà sul lato *OB*; dunque il piano *aob* combacerà col piano *AOB*, e l'angolo *aob* sarà uguale all'angolo *AOB*.

52. *Scolio*. La reciproca di questa proposizione è così manifesta che non occorre dimostrarla.

PROPOSIZIONE XXIX — *PROBLEMA*.

53. *Se un piano* BK *è perpendicolare ad un altro* MN, *ogni retta* AP *condotta perpendicolarmente alla intersezione comune* BC *nel piano* BK *sarà perpendicolare al piano* MN (fig. 18).

Dim. Nel piano *MN* si tiri *DE*, perpendicolare a *BC*. Essendo per ipotesi uguali gli angoli diedri che il piano *BK* forma col piano *MN*, gli angoli piani corrispondenti *APD*, *APE* saranno ancora

uguali (n° 51). Quindi la retta *AP* sarà perpendicolare alle due rette *BC*, *DE* che passano pel suo piede *P* nel piano *MN*, e però sarà perpendicolare a questo medesimo piano.

PROPOSIZIONE XXX — *TEOREMA*.

54. *Se una retta* AP *è perpendicolare ad un piano* MN, *ogni piano* BK *che passa per questa retta sarà perpendicolare al medesimo piano* (fig. 18).

Dim. Pel punto *P* si conduca nel piano *MN* la retta *DE* perpendicolare alla intersezione comune *BC* dei due piani. Essendo per ipotesi *AP* perpendicolare al piano *MN*, gli angoli *APD*, *APE* saranno retti, e perciò uguali; ma questi sono gli angoli piani corrispondenti agli angoli diedri adiacenti che il piano *BK* forma col piano *MN*, dunque il piano *BK* è perpendicolare al piano *MN* (n° 50).

PROPOSIZIONE XXXI — *TEOREMA*.

55. *Se due piani* BG, DF, *che s'intersegano, sono perpendicolari ad un piano* MN, *la loro comune intersezione* AP *sarà perpendicolare al medesimo piano* (fig. 19).

Dim. Imperocchè, se *AP* non è perpendicolare al piano *MN*, non potrà essere neppure perpendicolare alle due rette *BC*, *DE* che passano pel suo piede *P* nel piano *MN*; quindi nel piano *BG* si potrebbe condurre dal punto *P* una perpendicolare a *BC*, e nel piano *DF* una perpendicolare a *DE*. Ma ciascuna di queste perpendicolari dovrebb'essere perpendicolare al piano *MN* (n° 53); il che è assurdo (n° 14), dunque *AP* è perpendicolare al piano *MN*.

PROPOSIZIONE XXXII — *TEOREMA*.

56. *Due angoli diedri qualunque stanno come i loro angoli piani corrispondenti* (fig. 17).

Dim. Sieno *MCDN*, *mcdn* due angoli diedri qualunque, ed *AOB* *aob* i loro angoli piani corrispondenti.

Nel piano *AOB* si descriva col centro in *O*, e con un raggio ad arbitrio l'arco di circolo *AB*; lo stesso si faccia nel piano *aob*, prendendo per raggio $oa = OA$.

Ciò premesso, si supponga in primo luogo che gli archi *AB*, *ab* sieno commensurabili, e che la loro comune misura sia contenuta *m* volte nell'arco *AB*, e *n* volte nell'arco *ab*. Si divida l'arco *AB* in *m* parti uguali portando la comune misura sopra di esso, e l'arco *ab* in *n* parti uguali, indi si congiungano i punti di divisione col centro *O*, e col centro *o*, le rette congiungenti saranno raggi che divi-

deranno l'angolo *AOB* in *m* parti uguali, e l'angolo *aob* in *n* parti uguali. Or se per tutti questi raggi, e per gli spigoli *DC*, dc si facciano passare i piani che vengono determinati dall'incontro dei raggi con gli spigoli medesimi, l'angolo diedro *MCDN* sarà diviso in *m* angoli diedri uguali, e l'angolo diedro *mcdn* in *n* angoli diedri uguali, perchè i loro angoli piani corrispondenti sono uguali fra loro. Laonde risulta manifesto che gli angoli diedri proposti stanno come i loro angoli piani corrispondenti.

La stessa proporzione sussiste ancora quando gli archi *AB*, *ab* non sono commensurabili, e ciò si dimostra applicando a questo caso il ragionamento fatto per un caso analogo nella geometria piana (n° 205); dunque gli angoli diedri stanno come i loro angoli piani corrispondenti.

57. *Scolio.* Questa proposizione si enuncia ancora dicendo che: *Un angolo diedro qualunque ha per misura l'angolo piano corrispondente, ovvero l'arco di circolo che serve di misura all'angolo piano medesimo.*

Infatti, se si prenda per unità di misura degli angoli diedri *l'angolo diedro retto*, da quanto qui sopra si è dimostrato ne consegue che *un angolo diedro qualunque sta all'angolo diedro retto come l'angolo piano corrispondente al primo sta all'angolo piano corrispondente al secondo, cioè all'angolo retto.*

Quindi il rapporto di un angolo diedro qualunque alla sua unità di misura è uguale al rapporto dell'angolo piano corrispondente alla sua unità; il che equivale a dire che un angolo diedro qualunque ha per misura l'angolo piano corrispondente.

PROPOSIZIONE XXXIII — *TEOREMA.*

58. *Se per un punto* B *dello spigolo* OE *di un angolo diedro* DOEF *si conducano le rette* BP, BQ *respettivamente perpendicolari alle facce* OD, OF, *l'angolo* PBQ *formato da queste perpendicolari sarà il supplemento dell'angolo* ABC *che misura l'angolo diedro* (fig. 20).

Dim. La retta *BP* essendo perpendicolare al piano *OD*, sarà perpendicolare alla retta *OE*, che passa pel suo piede in questo piano. Parimente la retta *BQ* sarà perpendicolare ad *OE*. Da un'altra parte le rette *BA*, *BC* sono ancora perpendicolari ad *OE* per ipotesi, dunque le quattro rette *BA*, *BP*, *BQ*, *BC* sono situate nel piano che sarebbe prodotto dal rivolgimento dell'angolo retto *EBA* intorno al lato *EB* supposto immobile (n° 14); e perciò la somma de' quattro angoli, *ABC*, *ABP*, *PBQ*, *QBC* equivale a quattro angoli retti; ma gli angoli *ABP*, e *QBC* sono retti, dunque gli altri due presi insieme sono uguali a due retti, e per conseguenza l'angolo *PBQ* è il supplemento dell'angolo *ABC* che misura l'angolo diedro proposto.

CAPITOLO VII.

DEGLI ANGOLI SOLIDI.

59. *Definizione* I. Se più piani si tagliano a due a due e si riuniscono tutti in un medesimo punto, lo spazio angolare da essi compreso dicesi *angolo solido, o angolo poliedro*.

60. Questa definizione è sufficiente a dare una idea chiara del l'angolo solido; dappoichè l'angolo sia piano, sia solido non può definirsi, rigorosamente parlando, essendo impossibile definire esattamente in che consiste la inclinazione di due rette che s'incontrano in un medesimo piano senza formare una sola linea, o quella che risulta da tre, o più rette, le quali sono situate in piani differenti, e concorrono in un medesimo punto. Del resto, come già osservammo parlando dell'angolo piano, una definizione esatta dell'angolo solido non è necessaria: poichè si può conoscere l'uguaglianza di due angoli solidi sovrapponendo l uno all'altro, e ciò basta per fondare l'esatta teorica di detti angoli.

61. *Definizione* II. Il punto d'incontro dei piani che formano l'angolo solido chiamasi *vertice* dell'angolo stesso; e le intersezioni dei piani medesimi si dicono *spigoli* o *costole* dell'angolo solido.

62. *Definizione* III. L'angolo solido prende il suo nome particolare dal numero dei piani che lo costituiscono: così (fig. 21) l'angolo formato in *S* dai tre piani *SAB*, *SAC*, *SBC* si dice *angolo solido triedro*, o più semplicemente *angolo triedro*; quello formato da quattro piani chiamasi *angolo solido tetraedro*, o *angolo tetraedro*, ecc.

63. *Definizione* IV. In qualunque angolo solido si distinguono gli *angoli piani rettilinei* formati dagli spigoli in ciascuna faccia, come sarebbero (fig. 21) gli angoli *BSA*, *BSC*, *ASC*, e gli angoli diedri delle facce o piani successivi che costituiscono l'angolo solido medesimo.

64. Per indicare un angolo solido si enuncia la lettera del vertice ponendo di seguito tutte le altre lettere respettivamente situate sopra i suoi spigoli: così si dice (fig. 21) *l'angolo solido SABC*. Talvolta si adopera la sola lettera del vertice, dicendosi *l' angolo solido S*.

65. *Definizione* V. L'angolo solido si dirà *convesso* quando il piano di ciascuna faccia prolungato non taglia l'angolo medesimo, vale a dire quando tutti i suoi angoli diedri sono *salienti*. Tale è l'angolo solido *SABC* (fig. 21), in cui niuno spigolo *è rientrante*. E qui giova osservare che negli elementi di geometria si considerano i soli angoli solidi convessi.

PROPOSIZIONE XXXIV — *TEOREMA*.

66. *In ogni angolo triedro uno qualunque dei suoi tre angoli piani è minore della somma degli altri due* (fig. 21).

Dim. Sia *SABC* un angolo triedro, e sia *ASB* il maggiore dei tre angoli piani *ASB*, *ASC*, *CSB*. Nel piano *BSA* si faccia l'angolo *ASD* uguale all'angolo *ASC*, indi nel medesimo piano si conduca una retta *AB* che incontri le rette *SA*, *SD*, *SB*; si prenda $SC = SD$ e si tirino le rette *AC*, *BC*. I triangoli *ASD*, *ASC* sono uguali, perchè hanno un angolo uguale compreso fra lati respettivamente uguali, onde si avrà $AD = AC$. Or nel triangolo *ABC* il lato *AB* è minore della somma dei lati *AC*, *CB*, dunque togliendo da una parte *AD*, e dall'altra la sua uguale *AC*, resterà *DB* minore di *BC*. Quindi i due triangoli *SBC*, *SBD* avranno il lato $SC = SD$, il lato *SB* comune, ed il terzo lato *BC* del primo maggiore del terzo lato *BD* del secondo, e però sarà l'angolo *BSC* maggiore dell'angolo *BSD*; aggiungendo da una parte l'angolo *ASD*, e dall'altra il suo uguale *ASC*, risulta l'angolo *ASB* minore della somma degli angoli *ASC*, *BSC*.

PROPOSIZIONE XXXV — *TEOREMA*.

67. *In ogni angolo solido la somma degli angoli piani è minore di quattro angoli retti* (fig. 22).

Dim. Sia *S* un angolo solido; si conduca un piano che incontri tutti i suoi spigoli: le intersezioni di questo piano colle facce dell'angolo solido formeranno il poligono *ABCDE*. Da un punto *O* preso dentro questo poligono si tirino le rette *OA*, *OB*, *OC*, *OD*, *OE*; vi saranno intorno al punto *O* tanti triangoli quanti sono quelli intorno al punto *S*; per conseguenza la somma di tutti gli angoli dei primi triangoli è uguale alla somma di tutti gli angoli dei secondi. Or nell'angolo triedro *A* formato dai tre piani *EAB*, *EAS*, *BAS*, l'angolo piano *EAB* è minore della somma degli altri due; e similmente l'angolo piano *ABC* è minore degli angoli *ABS*, *CBS*, e così di tutti gli angoli del poligono *ABCDE*, dunque la somma degli angoli che stanno alle basi dei triangoli aventi il vertice comune *O* è minore della somma degli angoli alle basi dei triangoli che hanno il vertice comune *S*. Laonde per compensazione la somma degli angoli formati intorno al punto *O* dev'essere maggiore della somma degli angoli fatti intorno al punto *S*. Ma la prima somma è uguale a quattro angoli retti, dunque la seconda è minore di quattro retti.

PROPOSIZIONE XXXVI — *PROBLEMA*.

68. *Se pel vertice di un angolo triedro si conducano tre piani respettivamente perpendicolari ai suoi spigoli, si formerà un altro angolo triedro, in guisa che gli angoli piani del primo saranno i supplementi degli angoli diedri del secondo, e reciprocamente* (fig. 23).

Dim. Sia *SABD* un angolo triedro: pel punto *S* si conduca il pia-

no *aSb* perpendicolare allo spigolo *SD*, il piano *aSd* perpendicolare allo spigolo *SB*, ed il piano *bSd* perpendicolare allo spigolo *SA*. Questi tre piani determineranno un secondo angolo triedro *Sabd*, in modo che gli angoli piani *ASB*, *ASD*, *BSD* saranno i supplementi degli angoli che misurano gli angoli diedri *Sd*. *Sb*, *Sa*.

Infatti, essendo per costruzione lo spigolo *SD* perpendicolare al piano *aSb*, sarà pure perpendicolere alle rette *Sa*, *Sb* che passano pel suo piede in questo piano. Parimente lo spigolo *SB* essendo perpendicolare al piano *aSd*, sarà ancora perpendicolare alle rette *Sa*, *Sd* che passano pel suo piede in questo piano. Quindi la retta *Sa* è perpendicolare a un tempo agli spigoli *SD*, *SB*. e perciò al piano *DSB* che contiene questi due spigoli. Nello stesso modo si dimostrerà che *Sb* è perpendicolare al piano *ASD*, e che *Sd* è perpendicolare al piano *ASB*. Dunque gli angoli triedri *SABD*, *Sabd* son tali che gli spigoli dell'uno sono perpendicolari ai piani dell'altro, e viceversa.

Ciò premesso, da quanto si è dimostrato (n° 58) si desume che l'angolo *ASB* formato dalle rette *SA*, *SB*, rispettivamente perpendicolari ai piani *bSd*, *aSd*, è supplemento dell'angolo diedro *aSdb* compreso da questi piani; e reciprocamente l'angolo *aSb* formato dalle rette *Sa*, *Sb* rispettivamente perpendicolari ai piani *SDB*, *SAD* sarà supplemento dell'angolo diedro *ASDB*. Lo stesso dicasi degli altri angoli piani, e degli angoli diedri corrispondenti nei due angoli solidi.

69. *Scolio*. La proprietà, di cui godono gli angoli triedri *SABD*, *Sabd*, ha fatto dare ad essi il nome di *angoli triedri supplementarj*.

PROPOSIZIONE XXXVII — *TEOREMA*.

70. *Se due angoli triedri hanno gli angoli piani respettivamente uguali, gli angoli diedri formati dai piani di questi angoli saranno essi pure uguali* (fig. 24).

Dim. Sieno *S*, *s* i due angoli triedri; e si supponga che gli angoli piani dinotati dalle stesse lettere sieno respettivamente uguali, cioè $ASB = asb$, $ASC = asc$, $BSC = bsc$.

Per un punto *E* dello spigolo *SB* s'innalzino a questo spigolo nelle facce *ASB*, e *CSB* le perpendicolari *EM*, *EN*, l'angolo *MEN* formato da queste perpendicolari sarà la misura dell'angolo diedro *ASBC* (n° 57). Si prenda poi sul prolungamento di *SE* un punto *B* ad arbitrio, e sopra *SA* un punto *A* in modo che la retta *BA* incontri *EM* in un punto *M* situato fra *B* ed *A* (*). Similmente si prenderà sopra *SC* un punto *C* tale che la retta *BC* incontri *EN* in

(*) Ciò è sempre possibile. Infatti, se *EM* non incontra *SA*, la cosa è manifesta; se poi l'incontra, allora si prenderà il punto *A* al di sopra del punto d'incontro.

un punto N situato fra B e C. Finalmente si condurranno le rette AC, MN.

Ciò premesso, si ripeta nel triedro s la costruzione precedente prendendo $se = SE$, e $sb = SB$, l'angolo men sarà la misura dell'angolo diedro $asbc$, e sarà uguale all'angolo MEN.

Infatti, essendo i lati SA, SB rispettivamente eguali ai lati sa, sb, e l'angolo $ASB = asb$, sarà il triangolo ASB uguale al triangolo asb; e perciò risulta il lato $AB = ab$. Similmente si dimostra che il triangolo SBC è uguale a sbc, ed il triangolo ASC ad asc, onde sarà $BC = bc$, ed $AC = ac$. Quindi saranno eguali anche i triangoli ABC, ed abc. Da un'altra parte il triangolo MBE è uguale al triangolo mbe; poichè il lato $BE = be$, e gli angoli adiacenti a questi lati sono respettivamente uguali, onde sarà il lato $BM = bm$ ed $EM = em$. Similmente si dimostra che $BN = bn$, ed $EN = en$; e perciò il triangolo MNB è uguale al triangolo mnb, perchè l'angolo MBN compreso fra i lati BM, NB è uguale all'angola mbn compreso fra i lati bm, bn in virtù della uguaglianza dei triangoli ABC, abc. Quindi sarà il lato $MN = mn$, ed il triangolo MNE risulterà equilatero al triangolo mne, e però infine sarà l'angolo MEN uguale all'angolo men. Dunque gli angoli diedri SB, sb sono uguali, e nello stesso modo si potrà dimostrare che l'angolo diedro $SA = sa$, e $SC = sc$.

71. *Scolio.* Nella dimostrazione precedente gli angoli piani dei due angoli solidi si sono considerati come similmente disposti, ma il teorema avrebbe luogo anche quando gli angoli piani accennati fossero disposti in ordine inverso, come negli angoli solidi $SABC$, $S'A'B'C'$, dove si ha l'angolo piano $ASC = A'S'C'$, $ASB = A'S'B'$, e $BSC = B'S'C'$. Infatti, se sopra gli spigoli si prendano le parti SA, SB, SC, rispettivamente eguali alle parti SA', SB', SC'; indi si faccia $S'E' = SE$, e si ripeta sull'angolo solido S' la costruzione fatta nell'angolo solido S, si dimostrerà come sopra che l'angolo $M'E'N' = MEN$.

PROPOSIZIONE XXXVIII — *TEOREMA.*

72. *Due angoli triedri, composti di angoli piani rispettivamente uguali e similmente disposti sono uguali fra loro* (fig. 24).

Dim. Negli angoli triedri S, s sia l'angolo $ASC = asc$, $ASB = asb$, e $BSC = bsc$, sarà facile dimostrare che questi due angoli triedri sono uguali fra loro. Infatti, se l'angolo asc si sovrapponga al suo uguale ASC, l'angolo asb dovrà coincidere col suo uguale ASB, poichè l'angolo diedro sa è uguale all'angolo diedro SA. Quindi i due angoli solidi coincideranno, e perciò saranno uguali fra loro.

73. *Scolio.* Quando gli angoli piani di due angoli triedri S, S', sono uguali rispettivamente, ma disposti in ordine inverso, non si può dimostrare la loro uguaglianza col principio della sovrapposizione, Perocchè, se si fa coincidere l'angolo $A'S'C'$ col suo uguale

ASC in modo che lo spigolo $S'A'$ cada sopra SA, e $S'C'$ sopra SC, lo spigolo SB si troverà sul davanti del piano comune ASC, mentre lo spigolo $S'B'$ sarà situato dietro lo stesso piano; e però i due angoli solidi non combaceranno, ma si troveranno situati come nella fig. 26.

Che se poi (fig. 24) per far cadere lo spigolo $S'B'$ davanti il piano ASC si sovrapponga lo spigolo $S'C'$ allo spigolo SA, e $S'A'$ a SC, in tal caso neppure può succedere la coincidenza dei due angoli solidi; poichè l'angolo diedro $S'C'$ non è eguale all'angolo diedro SA, ed oltracciò l'angolo piano $C'S'B'$ non è uguale all'angolo ASB.

I due angoli solidi si troveranno in questo secondo caso disposti come gli angoli $SABC$, $SAB''C$ della figura.

Dunque in ogni caso non si può dimostrare la uguaglianza degli angoli triedri S, S' colla sovrapposizione, ma bisogna ricavarla dalla uguaglianza dei loro elementi costituenti, non essendovi alcuna ragione perchè essi debbano differire l'uno dall'altro. Infatti, sono composti degli stessi angoli piani, e degli stessi angoli diedri, e la loro differenza consiste in una semplice trasposizione di parti, essendo gli angoli piani dell'uno disposti in ordine inverso agli angoli piani dell'altro.

Legendre, che fu primo a fare queste importanti osservazioni, ha chiamati *uguali per simmetria*, o più semplicemente *simmetrici* gli angoli triedri, di cui è parola, perchè li considera come costituiti rispetto ad un medesimo piano l'uno da una parte, e l'altro dalla parte opposta, siccome si vede nella fig. 26.

Da tutto ciò segue che due angoli triedri si potranno chiamare *simmetrici* quando sono composti di angoli piani rispettivamente uguali e disposti in ordine inverso.

Nelle figure piane non vi può essere uguaglianza per simmetria, poichè si può rovesciare una figura piana, e prendere indifferentemente il di sopra per il di sotto; il che non può farsi nelle figure solide.

PROPOSIZIONE XXXIX — *PROBLEMA*

74. *Costruire un angolo triedro simmetrico ad un angolo triedro dato* (fig. 25).

Sol. Sia $SABC$ l'angolo solido dato. Si prolunghino gli spigoli AS BS, CS al di là del vertice S; l'angolo $SA'B'C'$ sarà il simmetrico di $SABC$. Infatti, gli angoli piani dei due triedri sono uguali ciascuno a ciascuno come opposti al vertice, ma sono disposti in ordine inverso, come è facile dimostrare. Imperciocchè, se si applica lo spigolo SA' sopra SA, e SC' sopra SC, lo spigolo SB' non potrà cadere sopra lo spigolo SB, perchè rispetto al piano comune ASC, lo spigolo SB si troverà davanti questo piano, e lo spigolo SB' dietro il piano medesimo. Che se si applichi lo spigolo SC' sopra SA, e SA' sopra SC, lo spigolo SB' caderà davanti il piano ASC, ma non potrà coincidere collo spigolo SB, poichè l'angolo $C'SB'$ non è ugua-

le all' angolo ASB, ma bensì al suo verticale CSB. Dunque i due triedri $SABC$, $SA'B'C'$ sono simmetrici.

75. *Scolio.* Merita di essere osservato che se un angolo triedro $sabc$ situato comunque (fig. 26) si compone di angoli piani uguali rispettivamente a quelli dell'angolo triedro $SABC$; il primo potrà coincidere sia con $SABC$, sia col suo simmetrico $SAB'C$. Infatti, se si suppone che gli angoli piani dinotati dall'una e dall'altra parte colle stesse lettere siano uguali fra loro, e si ponga lo spigolo sa sopra SA, e lo spigolo se sopra SC, ne risulta che essendo l'angolo diedro $esab = CSAB = CSAB'$, l'angolo piano bsa dovrà coincidere o coll'angolo piano BSA, o coll'angolo piano $B'SA$ secondo che lo spigolo sb caderà davanti al piano ASC, o dietro questo medesimo piano. Quindi l'angolo triedro $sabc$ coinciderà sia coll'angolo triedro $SABC$, sia coll'angolo triedro $SAB'C$.

76. *Corollario.* Dallo scolio precedente si deduce che ***con tre angoli piani dati si possono al più formare due angoli triedri, simmetrici l'uno dell'altro, o in altri termini che un angolo triedro non può avere che un solo simmetrico.***

PROPOSIZIONE XL — *TEOREMA.*

77. *Due angoli triedri che hanno gli angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno sono uguali, o simmetrici* (fig. 24).

Dim. Negli angoli triedri $SABC$, $sabc$ sia l'angolo diedro $SA = sa$, $SB = sb$, $SC = sc$; e si supponga che si siano costruiti gli angoli triedri supplementarj (n° 68). Poichè nei due angoli solidi proposti gli angoli diedri sono uguali ciascuno a ciascuno, ne segue che gli angoli solidi supplementarj avranno gli angoli piani uguali ciascuno a ciascuno, e per conseguenza questi angoli solidi supplementarj avranno ancora i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno. Ma gli angoli diedri degli angoli solidi supplementarj sono supplementi dei corrispondenti angoli piani degli angoli solidi proposti, dunque gli angoli solidi proposti dovranno avere gli angoli piani uguali ciascuno a ciascuno, e però saranno o uguali, o simmetrici.

PROPOSIZIONE XLI — *TEOREMA.*

78. *Due angoli triedri che hanno un angolo diedro uguale compreso fra due angoli piani uguali ciascuno a ciascuno, sono uguali o simmetrici* (fig 24).

Dim. Negli angoli triedri S, s sia l'angolo diedro $SB = sb$, e gli angoli piani ASB, CSB rispettivamente uguali agli angoli piani asb, csb, è manifesto che se questi angoli piani sono disposti nello stesso ordine, i due angoli solidi possono coincidere. Ma se gli angoli piani sono disposti in ordine inverso, allora l'uno degli angoli

solidi potrà coincidere col simmetrico dell' altro, e perciò saranno simmetrici.

PROPOSIZIONE XLII — *TEOREMA.*

79. *Due angoli triedri che hanno un angolo piano adiacente a due angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, sono uguali, o simmetrici* (fig. 24).

Dim. Negli angoli triedri S, s sia l'angolo piano $ASC = asc$, l'angolo diedro $SA = sa$, e l'angolo diedro $SC = sc$. È evidente che se gli angoli diedri accennati sono disposti nello stesso ordine, i due angoli solidi potranno coincidere, allorchè si sovrappongano l'uno all' altro. Ma se gli angoli diedri sono disposti in ordine inverso, allora uno degli angoli solidi proposti potrà coincidere col simmetrico dell'altro, e però saranno uguali nel primo caso, e simmetrici nel secondo.

80. *Scolio* I. Con i teoremi precedenti si possono stabilire le condizioni, che determinano gli angoli solidi poliedri.

Supponiamo che l'angolo solido S (fig. 26) sia formato da quattro angoli piani ASB, BSC, CSB', $B'SA$. La conoscenza di questi angoli non basta per determinare l'angolo solido; perocchè con gli stessi angoli piani si potrebbero formare infiniti angoli solidi. Infatti, se per gli spigoli SA, SC si faccia passare il piano ASC, l'angolo solido S sarà scomposto in due angoli triedri $SABC$, $SAB'C$. Or la conoscenza de'due angoli piani ASB, BSC non basta per determinare l' angolo triedro $SABC$, ma vi bisogna quella del terzo angolo piano ASC, e lo stesso accade per l'angolo triedro $SAB'C$, che non resta determinato dalla sola conoscenza de'due angoli piani CSB', e $B'SA$. Quindi è manifesto che con quattro angoli piani si potranno formare tanti angoli solidi diversi quanti saranno i valori diversi che si potranno dare all'angolo ASC. Ma se alla conoscenza dei quattro angoli piani si aggiunga quella dell'angolo diedro SB, allora l'angolo solido triedro $SABC$ sarà totalmente determinato ; e per conseguenza trovandosi in tal caso determinato il terzo angolo piano ASC, anche l'altro angolo solido triedro $SAB'C$ sarà determinato, e però lo sarà pure l'angolo solido S.

Si vede ora facilmente che per determinare un angolo solido formato da cinque angoli piani, non basta conoscere questi angoli, ma vi bisogna ancora la conoscenza di due angoli diedri: converrebbe conoscere tre angoli diedri, ed i sei angoli piani nell' angolo solido formato da questi angoli, e così in progresso.

Dalle cose precedenti si deduce che

Due angoli solidi sono eguali fra loro, quando sono composti di un medesimo numero di angoli piani rispettivamente uguali e disposti nello stesso ordine; e di più un angolo diedro del primo sia eguale all' angolo diedro omologo del secondo, se gli angoli solidi sono tetraedri, due angoli diedri del primo siano eguali

agli angoli diedri omologhi del secondo, se gli angoli solidi sono pentaedri, e così di seguito.

81. *Scolio* II. Ciò che abbiam detto intorno agli angoli triedri simmetrici si può applicare anche agli angoli solidi formati da più di tre angoli piani. Per esempio, un angolo solido formato dagli angoli piani A, B, C, D, E, ed un altro angolo solido formato dagli stessi angoli in un ordine inverso A, E, D, C, B, possono esser tali che i piani, ne' quali sono gli angoli eguali siano egualmente inclinati fra loro. In tal caso questi due angoli solidi, che sarebbero eguali senza che la sovrapposizione sia possibile o si diranno *angoli solidi eguali per simmetria*, o semplicemente *angoli solidi simmetrici*.

Da questa definizione e dallo scolio precedente si possono dedurre le condizioni che determinano l' eguaglianza per simmetria degli angoli solidi tetraedri, pentaedri, esaedri, ecc...

LIBRO II.

DEI SOLIDI TERMINATI DA SUPERFICIE PIANE.

CAPITOLO PRIMO

DEI POLIEDRI IN GENERALE.

Nozioni e definizioni preliminari

82. Per formare un angolo solido vi vogliono almeno tre piani che si riuniscono in un solo e medesimo punto; ma per limitare lo spazio da per ogni dove vi bisogna un quarto piano che limiti lo spazio indefinito compreso fra le tre facce dell'angolo accennato. Quindi la più semplice delle figure solide terminate da piani è il *tetraedro* o solido a quattro facce; viene in seguito il *pentaedro*, o solido a cinque facce, l'*esaedro* che ne ha sei, l'*ottaedro* che ne ha otto, il *dodecaedro*, dodici, l'*icosaedro*, venti. In generale si da il nome di *poliedro* ad ogni solido terminato da facce piane.

83. Le facce de'poliedri essendo poligoni, le intersezioni di questi poligoni si chiamano *lati*, *spigoli*, *o costole* del poliedro.

84. La *diagonale* di un poliedro è una linea retta che unisce due vertici non situati sulla medesima faccia.

85. Un poliedro si dice *convesso* quando la sua superficie non può essere incontrata da una linea retta in più di due punti. Di questa sola specie di poliedri si parla negli elementi, mettendo da parte quelli che hanno gli angoli solidi rientranti.

86. Dicesi *piramide* (fig. 22) un solido compreso fra più piani triangolari che partono da un medesimo punto *S*, e terminano ai differenti lati di un poligono *ABCDE*.

87. La piramide si può concepire come prodotta dal movimento di una linea retta indefinita, fissa in un punto *S*, ed obbligata a percorrere il perimetro di un poligono qualunque *ABCDE*.

88. Il punto *S* dicesi *vertice* della piramide, il poligono *ABCDE* ne è la *base*, e la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della *base* ne è l'*altezza*. Finalmente il complesso dei triangoli *ASB*, *BSC*, *CSD*, ecc: forma la *superficie convessa* o *laterale* della piramide.

89. La piramide dicesi *triangolare, quadrangolare*. ecc:, secondochè la base è un triangolo, un quadrilatero, ecc.

90. Una piramide chiamasi *regolare* quando la sua base è un poligono regolare, e la sua altezza cade sul centro della base medesima. In questo caso l'altezza prende il nome di *asse* della piramide, e si appella *apotema* la perpendicolare abbassata dal vertice della piramide sopra un lato della sua base.

91, Sotto il nome di *piramide retta* intenderemo quella, in cui l'altezza non cade fuori della base. Chiameremo poi *piramide obliqua* quella, in cui l'altezza cade fuori della base.

92. Il *prisma* (fig. 29) è un solido compreso da più piani parallelogrammi terminati da una parte, e dall'altra da due poligoni uguali e paralleli, che si chiamano *basi* del prisma. Il complesso dei parallelogrammi accennati forma la *superficie convessa* o *laterale* del prisma.

93. Si può concepire il prisma come generato dal movimento di una retta *AF* che si mantiene parallela a se stessa e di costante lunghezza, mentre descrive colla sua estremità *A* il perimetro di un poligono qualunque *ABCDE*. Con questo medesimo movimento l'altra estremità *F* descrive il perimetro del poligono *FGKIK* uguale e parallelo al poligono *ABCDE*.

94. L'*altezza* di un prisma è la distanza delle sue due basi, cioè la perpendicolare abbassata da un punto della base superiore sopra il piano della base inferiore.

95. Il prisma prende il nome di *triangolare*, *quadrangolare*, ecc: secondochè le sue basi sono triangoli, quadrilateri, ecc.

96. Un prisma dicesi *retto* quando i lati della superficie convessa sono perpendicolari alle basi. In questo caso i lati medesimi sono uguali all'altezza, ed i parallelogrammi, che formano la superficie convessa, sono rettangoli. Per lo contrario il prisma è *obliquo* allorchè i lati sono obliqui alle basi, nel qual caso essi lati sono maggiori dell' altezza.

97. Dicesi *parallelepipedo* il prisma, in cui le basi sono due parallelogrammi. Quindi il parallelepipedo è un solido compreso da sei facce parallelogrammiche (fig. 30).

98. Il parallelepipedo essendo un prisma, potrà essere per conseguenza *retto* o *obliquo*. Nel parallelepipedo retto quando la base è un rettangolo, tutte le facce sono rettangolari; e perciò si chiama *parallelepipedo rettangolo*. Finalmente tra i parallelipipedi rettangoli si distingue il *cubo*, che è un solido compreso da sei quadrati uguali.

99. Nella teorica dei poliedri si distinguono particolarmente le piramidi, ed i prismi, perchè sopra questi solidi tutta quella teorica viene appoggiata.

PROPOSIZIONE XLIII — *TEOREMA*.

100. *Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla ba*

se, l'altezza, ed i lati saranno divisi in parti proporzionali; e la sezione sarà un poligono simile alla base (fig. 28).

Dim. Sia la piramide *SABCD* tagliata da un piano *abcd* parallelo alla base; sia *SO* l'altezza della piramide, e si conducano le rette *ao, AO*.

1°. Le intersezioni *ab, AB* dei piani *abcd, ABCD* col piano *SAB* essendo parallele (n° 33), sarà il triangolo *Sab* simile al triangolo *SAB*. Nello stesso modo si dimostra che il triangolo *Sbc* è simile al triangolo *SBC*, il triangolo *Scd* al triangolo *SCD*, ecc; per conseguenza la ragione di *Sa*: *SA* sarà uguale a quella di *Sb*: *SB*, di *So*: *SC*, ecc. Ma da un'altra parte la ragione di *Sa*: *SA* è uguale a quella dell'altezza *So* all'altezza *SO*, poichè *ao* é parallela ad *AO*, dunque i lati *SA, SB, SC*, ecc., e l'altezza *SO* della piramide sono divisi in parti proporzionali.

2°. Per la simiglianza degli stessi triangoli si ha *ab*: *AB* :: *Sb*: *SB* :: *bc* : *BC*, dunqne *ab* : *AB* :: *bc* : *BC*, e così pure si dimostra che *bc* : *BC* :: *cd* : *CD*, ecc. Quindi i poligoni *abcd, ABCD* hanno i lati proporzionali; hanno di più gli angoli respettivamente uguali $a = A$, $b = B$, ecc., perchè sono compresi fra lati paralleli e rivolti nella stessa direzione, dunque il poligono *abcd* è simile al poligono *ABCD*.

PROPOSIZIONE XLIV — *TEOREMA.*

101. *Le basi di due piramidi, che hanno la medesima altezza, stanno fra loro come le sezioni fatte da piani condotti nelle due piramidi parallelamente ad esse basi, ed ad uguale distanza dai vertici* (fig. 28).

Dim. Sieno due piramidi *S*, e *T*, che abbiano le altezze uguali *SO*, *TQ*. Si faccia *Tq* = So, e pel punto *q* si conduca un piano parallelo alla base *MNP*, la sezione *mnp* sarà simile a questa base (n° 100). Parimente se pel punto *o* si conduca un piano parallelo alla base *ABCD*, la sezione *abcd* sarà simile a questa base. Or essendo simili i poligoni *ABCD, abcd*, le loro aje staranno come i quadrati dei lati omologhi *AB, ab*, ovvero come i quadrati delle altezze S*O*, *so* (n° 100). Nello stesso modo si dimostra che i poligoni *MNP, mnp* stanno come i quadrati delle altezze *TQ, Tq*, ovvero come i quadrati di *SO, so*, dunque in fine si avrà

ABCD: *MNP* :: *abcd*: *mnp*.

102. *Corollario.* Da ciò segue che se le basi *ABCD, MNP* delle due piramidi sono equivalenti, le sezioni *abcd, mnp* fatte ad uguale altezza nelle stesse piramidi saranno equivalenti, e reciprocamente.

PROPOSIZIONE XLV — *TEOREMA.*

103. *Una piramide qualunque si può decomporre in piramidi triangolari* (fig. 26).

Dim. Sia, per esempio, la piramide quadrangolare *SABCB'*. Si tiri la diagonale *AC* nella base della piramide, indi pel vertice *S* e per la diagonale medesima si faccia passare il piano *ASC*, è manifesto che questo piano dividerà la piramide proposta in due piramidi triangolari. Nello stesso modo, cioè tirando due diagonali nella base di una piramide pentagonale, si potrà divider questa in tre piramidi triangolari, e così in progresso.

PROPOSIZIONE XLVI — *TEOREMA.*

104. *Qualunque sezione fatta in un prisma da un piano parallelo alla base è uguale a questa base.* (fig. 29).

Dim. Si tagli il prisma *abck* con un piano parallelo alla base, il poligono *lmnpq* che ne risulta sarà uguale al poligono *abcde*. Infatti, le rette *lm, ab* sono uguali come parallele comprese fra parallele, e così pure si dimostra che *mn* è uguale e parallela a *bc*, *np* a *cd*. ec. Quindi i due poligoni avranno i lati uguali rispettivamente, ed anche gli angoli eguali, perchè compresi fra lati paralleli, e rivolti dalla stessa parte: e perciò sarà il poligono *lmnpq* uguale al poligono *abcde*.

105. *Corollario.* In qualunque prisma le sezioni fatte da piani paralleli fra loro sono uguali; dappoichè una di queste sezioni si può considerare come base di un prisma cui è parallela l'altra sezione.

106. *Scolio.* Ogni prisma poligono si può sempre decomporre in prismi triangolari, i quali hanno la medesima altezza del prisma, e le basi sono i differenti triangoli *ABC*, *ACD*, *ADE*, ecc., nè quali si può decomporre la base *ABCDE* per mezzo delle diagonali *AC*, *AD*.

PROPOSIZIONE XLVII — *TEOREMA.*

107. *In ogni parallelepipedo le facce opposte sono uguali e parallele, e gli angoli triedri opposti sono simmetrici* (fig. 30).

Dim. Sieno *ABCD*, *EGFH* le basi del parallelepipedo proposto, le quali (n° 97) sono parallelogrammi eguali situati in piani paralleli. Or dico che due facce opposte qualunque *AE*, *DG* sono pure uguali e parallele. Perocchè, essendo *ABCD* un parallelogrammo, la retta *AB* è uguale e parallela a *CD*; parimente essendo *EBCG* un parallelogrammo, la retta *BE* è uguale e parallela a *CG*. Quindi gli angoli *ABE*, *DCG* hanno i lati paralleli e rivolti dalla stessa parte: perciò sono uguali, ed i loro piani sono paralleli (n° 42). Ma un parallelogrammo é determinato quando si conoscono due lati adiacenti e l'angolo da essi compreso, dunque il parallelogrammo *AE* è uguale a *DG*.

In secondo luogo, gli angoli triedri opposti come *B*, e *F*, sono simmetrici. Infatti, si prolunghi lo spigolo *DF* verso *O*, lo spigolo *HF*

verso *M*, ed infine *GF* verso *N*. Nascerà un nuovo angolo solido triedro *FOMN* simmetrico all' angolo solido *FGHD* (n°. 74); ma eguale all'angolo solido *B*, perchè essendo *FO* parallela a *BE*, *FM* a *BC*, e *FN* ad *AB*, gli angoli piani che formano l' angolo solido *FMNO* saranno rispettivamente eguali agli angoli piani che compongono l' angolo solido *B*, e di più saranno similmente situati. Quindi resta dimostrato che l'angolo solido *B* è simmetrico all'angolo solido opposto *FHDG*.

108. *Scolio*. Un prisma è determinato quando si conosce la base, e la retta generatrice ; dunque un parallelepipedo sarà determinato allorchè si conoscerà uno dei suo angoli triedri *B*, e le lunghezze de'lati *AB*, *BE*, *BC*.

PROPOSIZIONE XLVIII — *TEOREMA*.

109. *In ogni parallelepipedo le quattro diagonali si tagliano scambievolmente in due parti uguali nel medesimo punto* (fig. 31).

Dim. Per due lati opposti *BF*, *DH* si faccia passare un piano ; la sezione sarà il parallelogrammo *BFDH*: per conseguenza le diagonali *BH*, *FD* si taglieranno scambievolmente in due parti uguali nel punto *O*. Or se per i lati opposti *AD*, *FG* si conduca un altro piano, la sezione *ADFG* sarà pure un parallelogrammo, e la diagonale *AG* dividerà in due parti uguali la diagonale *FD*; e però la diagonale *AG* dovrà passare pel punto *O*. Si dimostrerà lo stesso per la diagonale *EC*; dunque le quattro diagonali del parallelepipedo si tagliano scambievolmente in due parti uguali nel medesimo punto *O*.

110. *Scolio*. Il punto *O* si chiama *centro* del parallelepipedo.

È manifesto che le rette tirate dal punto *O* a tutti i vertici del parallelepipedo, lo dividono in piramidi che hanno per vertice comune il punto *O*, e per basi le facce del parallelepipedo medesimo. E siccome ogni piramide si può decomporre in piramidi triangolari (n° 103), così ogni parallelepipedo si potrà decomporre in piramidi triangolari. Parimente prendendo un punto nell'interno di un poliedro, si potrebbe decomporlo in piramidi triangolari ; ma essendo siffatta scomposizione molto importante, ne indicheremo un'altra nel teorema qui appresso.

PROPOSIZIONE XLIX — *TEOREMA*.

111. *Un poliedro convesso può sempre decomporsi in piramidi triangolari* (fig. 32).

Dim. Sieno *SAB*, *ABCD*, *CDE* tre facce consecutive di un poliedro. Se per uno dei vertici *S* si conducano delle linee rette a tutti gli altri, si determinerà una serie di piramidi *SABCD*, *SDCE*, ecc., che avranno per vertice comune il punto *S*, e per basi le differen-

ti facce del poliedro, eccetto quelle che vanno a terminare al punto S. Il complesso di tutte queste piramidi formerà il poliedro medesimo: ma ogni piramide si può decomporre in piramidi triangolari, dunque ogni poliedro convesso può decomporsi in piramidi triangolari.

112. *Scolio.* Apparisce da questo teorema che siccome la teorica delle figure piane rettilinee si riduce a quella dei triangoli, così la teorica dei poliedri dovrà ridursi a quella delle piramidi triangolari. Nondimeno quest'ultima non potrebbe farsi rigorosamente, senza ricorrere ad alcune proprietà dei prismi, ed ecco perchè nella geometria solida si parla in modo speciale delle piramidi, e dei prismi, ed in un modo generale degli altri poliedri.

CAPITOLO II.

DEI POLIEDRI UGUALI.

PROPOSIZIONE L — *TEOREMA.*

113. *Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno tre facce rispettivamente uguali, e similmente disposte* (fig. 24).

Dim. Siano le due piramidi $SABC$, $sabc$, che abbiano le facce SBA, SBC, SCA rispettivamente uguali alle facce, sba, sbc, sca, e similmente disposte. Gli angoli triedri S, e s saranno uguali, perchè sono composti di angoli piani uguali ciascuno a ciascuno, e disposti nello stesso ordine (n° 72), per conseguenza gli angoli diedri SA, SB, SC saranno rispettivamente uguali agli angoli diedri sa, sb, sc. Quindi se si fanno coincidere gli angoli triedri accennati, risulterà manifesta la coincidenza delle due piramidi, che perciò saranno uguali.

114. *Corollario.* Da questo teorema si deduce evidentemente che due piramidi triangolari sono uguali allorchè hanno tutti i lati rispettivamente uguali e similmente disposti.

PROPOSIZIONE LI — *TEOREMA.*

115. *Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno un angolo diedro uguale, compreso fra due facce rispettivamente uguali e similmente disposte* (fig. 24).

Dim. Siano $SABC$, $sabc$ due piramidi triangolari, nelle quali sia l'angolo diedro SB uguale all'angolo diedro sb, e le facce SBA, SBC rispettivamente uguali alle facce sba, sbc, e similmente disposte. È chiaro che se si ponga la faccia sba sopra la sua uguale SBA, e l'angolo diedro sb sopra SB, la faccia sbc combacerà con la faccia SBC, e però risulta manifesta l'eguaglianza delle due piramidi.

PROPOSIZIONE LII — *TEOREMA.*

116. *Due piramidi triangolari sono uguali, quando hanno una faccia uguale adiacente a tre angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, e similmente disposti* (fig. 24).

Dim. Siano *SABC*, *sabc* due piramidi triangolari, che abbiano le facce *ABC*, *abc* uguali fra loro, come pure gli angoli diedri adiacenti a queste facce. Se si fanno combaciare le facce *ABC*, *abc*, la faccia *asb* si troverà nel piano della faccia *ASB*, ed il punto *s* caderà in un punto di questo piano. Parimente, la faccia *asc* si troverà nel piano della faccia *ASC*, ed il punto *s* caderà in un punto di questo piano. Nello stesso modo ancora si dimostrerà che la faccia *bsc* sarà situata nel piano della faccia *BSC*, e che il punto *s* caderà in un punto di questo piano; per conseguenza il punto *s* dovendosi trovare a un tempo nei tre piani *ASB*, *ASC*, *BSC*, si troverà nel punto *s* del loro incontro. Quindi le due piramidi triangolari coincideranno, e perciò saranno eguali.

PROPOSIZIONE LIII — *TEOREMA.*

117. *Due piramidi triangolari sono uguali quando hanno una costola uguale, e tutti i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, e similmente disposti* (fig. 24).

Dim. Siano *SABC*, *sabc* due piramidi triangolari, nelle quali siano uguali gli spigoli *SA*, *sa*, come pure tutti gli angoli diedri similmente situati. Gli angoli triedri *S*, *s* sono uguali, poichè hanno i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti (n° 77); per conseguenza i loro angoli piani *ASB*, *asb* sono eguali, come pure gli angoli *ASC*, *asc*. Per la stessa ragione sono uguali gli angoli triedri *A*, *a*, ed in conseguenza gli angoli *SAB*, *sab*, e gli angoli *SAC*, *sac*. Quindi i triangoli *ASB*, *asb* sono uguali, perchè hanno il lato *SA* uguale al lato *sa*, e sono uguali gli angoli adiacenti a questi lati ciascuno a ciascuno: lo stesso si verifica per i due triangoli *ASC*, *asc*. Dunque le due piramidi proposte hanno un angolo diedro uguale, cioè *BASC* = *basc* compreso fra due facce uguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte; perciò queste due piramidi sono uguali (n° 115).

PROPOSIZIONE LIV — *TEOREMA.*

118. *Due piramidi sono eguali quando hanno basi uguali, e due facce contigue alla prima di queste basi uguali rispettivamente a due facce contigue alla seconda, e similmente disposte* (fig. 27).

Dim. Siano *SABDC*, *sabcd* due piramidi, che abbiano le basi u-

guali *ABCD*, *abcd* e le facce contigue *ASB*, *BSD* rispettivamente uguali alle facce contigue *asb*, *bsd*, e similmente disposte. Si tirino le diagonali *AD*, *ad*, le due piramidi saranno decomposte in piramidi triangolari dai piani *SAD*, *sad*. Or in virtù della uguaglianza dei poligoni *ABCD*, *abcd*, saranno uguali i triangoli *ABD*, *abd*; per conseguenza le piramidi triangolari *SABD*, *sabd* avranno tre facce uguali ciascuna a ciascuna e similmente situate, onde saranno uguali fra loro (n° 113). Quindi se si fanno coincidere i poligoni *ABCD*, *abcd*, i triangoli *ABD*, *abd* coincideranno, come pure le piramidi triangolari uguali *SABD*, *sabd*; e però le due piramidi avranno tutti i loro vertici comuni, e coincideranno in tutta la loro estensione. Dunque queste piramidi sono eguali.

PROPOSIZIONE LV — *TEOREMA*.

119. *Due prismi sono eguali, quando hanno una base e due facce contigue eguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte* (fig. 29).

Dim. Nei prismi *AK*, *ak* sia la base *ABCDE* uguale alla base *abcde*, la faccia *ABGF* uguale alla faccia *abgf*, e la faccia *BCHG* uguale alla faccia *bchg*. Gli angoli triedri *B*. e *b* sono uguali poiché hanno gli angoli piani rispettivamente uguali; e similmente disposti; perciò posta la base *abcde* sopra la base *ABCDE*, lo spigolo *bg* coinciderà collo spigolo *BG*, la faccia *bchg* colla faccia *BCHG*, e la faccia *abgf* colla faccia *ABGF*. Quindi i punti *f*, *g*, *h* caderanno rispettivamente su i punti *F*, *G*, *H*; ma per tre punti non situati in linea retta può passare un solo piano; dunque il poligono *fghik* combacerà col suo uguale *FGHIK*, e gli spigoli *id*, *ke* coincideranno essi pure cogli spigoli *ID*, *KE*. Laonde i due prismi sono uguali.

120. *Corollario. Due prismi retti sono uguali quando hanno basi eguali, ed uguali altezze*; dappoichè in tal caso le loro facce rettangolari sono uguali a due a due, avendo uguali basi, ed uguali altezze.

PROPOSIZIONE LVI — *TEOREMA*.

121. *Il piano che passa per le diagonali corrispondenti delle due basi di un parallelepipedo retto, lo divide in due prismi triangolari uguali fra loro* (fig. 30).

Dim. Sia il parallepipedo retto *AG*, e siano *ABCD*, *EGFH* le sue basi. Essendo lo spigolo *EB* eguale e parallelo allo spigolo *FD* (n° 97), se si conducano le diagonali *BD*, *EF* delle due basi, la figura *EBDF* sarà un rettangolo; poichè per ipotesi il parallelepipedo *AG* è retto, e per conseguenza gli spigoli *EB*, *FD* sono perpendicolari alle basi. Quindi i due solidi *ABDEFH*, e *BCDEGF* sono prismi triangolari retti che hanno uguali basi, ed uguali altezze, e perciò sono uguali fra loro (n° 120).

PROPOSIZIONE LVII — *TEOREMA.*

122. *Due poliedri* S, s *sono uguali, allorchè possono decomporsi in un medesimo numero di piramidi uguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte* (fig. 32).

Dim. Infatti, se si fanno coincidere due di queste piramidi *SABC*, *sabc*, supposte uguali, le piramidi vicine coincideranno con una faccia; e siccome esse sono uguali per ipotesi, e similmente disposte, così coincideranno in tutta la loro estensione. Lo stesso avrà luogo progressivamente per tutte le piramidi prese a due a due, e però i poliedri medesimi coincideranno.

123. *Scolio.* La reciproca di questa proposizione è evidente, cioè che due poliedri uguali possono decomporsi in un medesimo numero di piramidi uguali ciascuna a ciascuna e similmente disposte.

PROPOSIZIONE LVIII — *TEOREMA.*

124. *Due poliedri sono uguali quando hanno le facce rispettivamente uguali e similmente disposte, e ciascun angolo diedro di due facce contigue in uno di essi uguale all'angolo diedro delle facce omologhe nell'altro* (fig. 32).

Dim. Imperocchè, se nei due poliedri si considerano due piramidi triangolari omologhe esterne *SABC*, *sabc*, si vedrà che esse sono uguali, poichè hanno un angolo diedro uguale compreso fra facce rispettivamente uguali, e similmente situate. Quindi se dai due poliedri si tolgano queste piramidi, si avranno altri due poliedri, nei quali le nuove facce saranno rispettivamente uguali, e saranno pure rispettivamente uguali i nuovi angoli diedri. Dunque si potrà operare sopra questi nuovi poliedri come sopra i precedenti, e così progredendo si potranno decomporre i due poliedri in un medesimo numero di piramidi triangolari uguali e similmente disposte; e però questi poliedri saranno uguali.

125. *Scolio.* La reciproca della proposizione precedente è manifesta, cioè che due poliedri eguali hanno le facce omologhe rispettivamente uguali e similmente disposte, e ciascun angolo diedro di due facce contigue in uno di questi poliedri uguale all'angolo diedro delle facce omologhe nell'altro (*).

(*) Euclide ha messo come definizione che due poliedri sono uguali, quando sono compresi da un medesimo numero di piani uguali ciascuno a ciascuno. Lungi dall'essere una definizione è questo un teorema difficilissimo a dimostrarsi, e fortunatamente non è necessario negli elementi. La dimostrazione fattane dal celebre geometra Cauchy potrà leggersi nelle note alla geometria di Legendre.

CAPITOLO III.

DEI POLIEDRI EQUIVALENTI.

126. *Definizione* I. Lo spazio compreso dalla superficie di un solido dicesi *solidità* o *volume*.

127. *Definizione* II. Due solidi si chiamano *equivalenti* quando hanno il medesimo volume, ma non possono coincidere.

128. *Definizione* III. Misurare il volume di un solido significa determinare il suo rapporto col volume di un altro solido di nota grandezza che si prende per *unità di volume*.

129. Per unità di volume si è prescelto quello di un cubo, cui si dà per spigolo l'unità di lunghezza. Così se l'unità di lunghezza è il palmo, l'unità di volume sarà un cubo, il cui spigolo è un palmo, e che perciò si chiama *palmo cubico*. Se l'unità di lunghezza è la canna, l'unità di volume sarà un cubo, il cui spigolo è una canna, e si chiama *canna cubica*, e così in progresso.

130. *Definizione* IV. Sotto il nome di *dimensione di un parallelepipedo rettangolo* s'intendono le tre rette che rappresentano la sua altezza, e le due dimensioni della sua base, cioè la lunghezza, e la larghezza.

131. Alle denominazioni *larghezza*, ed *altezza* si sostituiscono talvolta quelle di *grossezza*, e di *profondità*. Così si dice, per esempio, la lunghezza e l'altezza di un edifizio; la lunghezza, l'altezza, e la grossezza di un muro; la lunghezza, la larghezza, e la grossezza di una tavola; la lunghezza, la larghezza, e la profondità di un fosso, ecc.

132. Si è dato il nome di *dimensioni* alla lunghezza, larghezza, ed altezza di un parallelepipedo rettangolo, perchè esse misurano l'estensione di questo solido nelle sue tre direzioni principali. Infatti, l'estensione di un parallelepipedo rettangolo è uniforme nella direzione di ciascuna delle sue tre dimensioni; dappoichè essa è limitata da due piani paralleli, ambidue perpendicolari allo spigolo che misura questa dimensione. Siffatta disposizione particolare al parallelepipedo rettangolo non esiste più negli altri solidi; non pertanto si adopera ancora la parola *dimensione* per indicare le tre *direzioni* principali della loro estensione, abbenchè la maggior parte di questi solidi non abbia, propriamente parlando, nè lunghezza, nè larghezza, nè altezza assegnabili effettivamente. Si può ora comprendere perchè siasi prescelto il cubo per unità di volume dei solidi.

PROPOSIZIONE LVIII — *TEOREMA*.

133. *Il parallelepipedo rettangolo ha per misura il prodotto delle sue tre dimensioni* (fig. 33).

Dim. Sia *MB* il parallelepipedo rettangolo proposto. Supponiamo per fissare le idee, che lo spigolo *AB* contenga 6 volte l'unità di lunghezza *ab*, e che gli spigoli *AD*, ed *AC* la contengano rispettivamente 4 volte, e 7 volte.

Si divida *AB* in 6 parti uguali, e per tutti i punti di divisione si conducano altrettanti piani perpendicolari ad *AB*: parimente si divida *AD* in 4 parti uguali, e per tutti i punti di divisione si conducano i piani perpendicolari ad *AD*: finalmente si divide *AC* in 7 parti uguali, e per tutti i punti di divisione si conducano i piani perpendicolari ad *AC*.

È manifesto che con questa costruzione il parallelepipedo *BM* si troverà decomposto in piccoli parallelepipedi rettangoli, che avranno tutti le loro tre dimensioni uguali alla unità di lunghezza *ab*, perchè due piani perpendicolari ad una medesima retta sono paralleli fra loro (n° 25). Dunque questi piccoli parallelepipedi sono cubi, dei quali ciascuno ha per spigolo l'unità di lunghezza, e perciò è unità di volume. Or è evidente che il numero di tutti questi cubi corrisponde al prodotto dei numeri 4, 6, e 7, cioè 168, dunque se gli spigoli *AB*, *AD*, *AC* sono commensurabili coll' unità di lunghezza *ab*, il parallelepipedo rettangolo *BM* avrà per misura il prodotto delle sue tre dimensioni.

Suppongasi in secondo luogo che due spigoli soltanto *AB*, ed *AD*, sieno commensurabili coll'unità di lunghezza *ab*, dico che anche in questo caso il volume del parallelepipedo *BM* sarà espresso dal prodotto dei tre spigoli *AB*, *AD*, *AC*. Infatti, si supponga, se è possibile, che il volume accennato sia espresso dal prodotto $AB \times AD$ per un terzo spigolo *AO* minore di *AC*. Si prenda una parte aliquota di *ab* che sia minore di *OC*, e si tolga dallo spigolo *AC* tante volte quante si può, si avrà un residuo *CL* minore di *OC*; pel punto *L* si conduca un piano parallelo alla base *ABD* del parallelepipedo proposto. Il parallelepipedo *BN* che ne risulta avrà per misura il prodotto dei tre spigoli *AB*, *AD*, *AL*, poichè questi spigoli sono commensurabili coll'unità di lunghezza. Ma per ipotesi il prodotto degli spigoli *AB*, *AD*, *AO* è la misura del parallelepipedo *BM*, dunque il parallelepipedo *BN* dovrebbe essere maggiore del parallelepipedo *BM*; il che è assurdo. Nello stesso modo si dimostrerebbe che il volume del parallelepipedo *BM* non può essere espresso dal prodotto $AB \times AD$ per un terzo spigolo maggiore di *AC*.

In terzo luogo sia il solo spigolo *AD* commensurabile con *ab*, e si supponga che il volume del parallelepipedo *BM* sia espresso da $AB \times AD$ per un terzo spigolo minore di *AC*. Si faccia la costruzione sopraccennata, e sarà il parallelepipedo *BN* espresso dal prodotto dei tre spigoli *AB*, *AD*, *AL*, poichè *AD*, ed *AL* sono commensurabili coll'unità di lunghezza. Laonde il parallelepipedo *BN* sarebbe maggiore del parallelepipedo *BM*; il che non può sussistere.

Finalmente se tutti e tre gli spigoli sono incommensurabili coll'unità di lunghezza, si farà la stessa costruzione adoperata nei due casi precedenti, e si dimostrerà nello stesso modo che il parallelepi-

pedo *BN*, che in questo caso avrebbe un solo spigolo commensurabile *AL*, sarebbe maggiore di *BM*. Dunque in ogni caso il parallelepipedo rettangolo ha per misura il prodotto delle sue tre dimensioni.

134. *Scolio.* Quando si dice che il parallelepipedo rettangolo *BM* ha per misura il prodotto delle sue tre dimensioni, si fa uso di una espressione abbreviata, colla quale si vuole intendere che il parallelepipedo proposto *BM* sta al cubo *bm*, che è l'unità di volume, come il numero astratto risultante dal prodotto delle tre linee *AB*, *AD*, *AC* all'unità di lunghezza *ab*. Or siccome il prodotto di *AB* moltiplicata per *AD* rappresenta l'aja del rettangolo *ABD*, così se si prenda questo rettangolo per base del parallelepipedo, lo spigolo *AC* ne sarà l'altezza; e però si può dire che: *il parallelepipedo rettangolo ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

Parlando a rigore, è impossibile moltiplicare una superficie per una linea, ma questo modo di dire è una espressione abbreviata, colla quale si dee intendere che il numero astratto delle unità quadrate della base del parallelepipedo moltiplicato pel numero astratto delle unità lineari dell'altezza dà per prodotto un altro numero pure astratto, il quale esprime il rapporto del parallelepipedo proposto al cubo, ch'è l'unità di volume.

135. *Corollario* I. Se il parallelepipedo rettangolo è un cubo, se ne avrà la misura prendendo il numero delle unità di lunghezza contenute in uno dei suoi spigoli, e formando un prodotto in cui questo numero entri tre volte come fattore. Così, se lo spigolo del cubo proposto contiene 2 unità di lunghezza, questo cubo conterrà 8 unità di volume. Ed ecco perchè in aritmetica si è dato il nome di cubo al prodotto di tre fattori uguali.

136. *Corollario* II. Due parallelepipedi rettangoli che hanno basi equivalenti, ed altezze uguali, sono equivalenti, dappoichè hanno la stessa misura

137. *Corollario* III. Due parallelepipedi rettangoli che hanno le basi in ragion reciproca delle altezze, sono equivalenti.

138. *Corollario* IV. Due parallelepipedi rettangoli che hanno la stessa altezza, stanno fra loro come le basi. Viceversa, se hanno uguali basi, o basi equivalenti, stanno fra loro come le altezze.

139. *Corollario* V. Due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro tre dimensioni, ovvero come i prodotti delle basi moltiplicate per le altezze, o finalmente in ragione composta dalla ragione delle basi, e dalla ragione delle altezze.

PROPOSIZIONE LIX — *TEOREMA.*

140. *Ogni parallelepipedo retto è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo che ha la stessa altezza, ed una base equivalente.* (fig. 34).

Dim. Sia *AL* un parallelepipedo retto, di cui la base è il paralle-

logrammo *ABCD*. Dai punti *A*, e *B* si abbassino sopra *DC* le perpendicolari *AO*, *BN*, indi dai punti *O*, e *C* s'innalzino sopra *DC* nel piano *MDCL* le perpendicolari *OQ*, *NP*, e finalmente si tirino le rette *IQ*, *KP*. Con questa costruzione si avrà il solido *AP*, che sarà un parallelepipedo rettangolo equivalente al parallelepipedo proposto. Infatti, la base *ABNO* è un rettangolo equivalente al parallelogrammo *ABCD*; parimente la base superiore *IKPQ* è un rettangolo equivalente al parallelogrammo *IKLM*. Di più, le facce laterali del solido *AP* sono pure rettangolari; dappoichè essendo *MD* perpendicolare al piano della base *ABCD* del parallelepipedo retto, le linee *QO*, *NP* parallele a *MD* saranno pure perpendicolari al piano medesimo (n° 24); ma gli spigoli *IA*, *KB* sono essi ancora perpendicolari al piano accennato, dunque il solido *AP* è un parallelepipedo rettangolo. Or da un'altra parte i due prismi triangolari retti *AM*, *BL* sono uguali, poichè le basi *ADO*, *BCN* sono uguali, come pure le altezze *DM*, *NP* (n° 120): dunque se a questi due prismi si aggiunge di comune il solido *ABCOIKLQ*, il parallelepipedo retto *AL* risulterà equivalente al parallelepipedo rettangolo *AP*.

141. *Corollario* I. Dalla proposizione precedente si deduce che *Il parallelepipedo retto ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*.

142. *Corollario* II. Due parallelepipedi retti che hanno le basi equivalenti, e le altezze uguali, sono equivalenti.

143. *Corollario* III. Il prisma triangolare retto *BCDF* (fig. 30) ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.

Infatti, il prisma triangolare retto *BCDF* è metà (n° 121) del parallelepipedo retto *CH* che ha una base doppia e la stessa altezza.

144. *Corollario* IV. Dal corollario precedente apparisce che *Due prismi triangolari retti sono equivalenti, quando hanno basi equivalenti, ed altezze uguali.*

PROPOSIZIONE LX — *TEOREMA*.

145. *Due piramidi triangolari rette che hanno basi equivalenti, ed altezze uguali, sono equivalenti* (fig. 35).

Dim. Sieno *SABC*, *sabc* due piramidi triangolari rette. Si supponga che le basi *ABC*, *abc* sieno situate in un medesimo piano, e che l'altezza della prima piramide si confonda collo spigolo *SA*, e l'altezza della seconda cada sul lato *ac* della base *abc*; poichè se cadesse dentro di questa base, la dimostrazione seguente resterebbe sempre la stessa.

Si chiamino *P*, e *p* i volumi delle due piramidi : se queste piramidi non sono equivalenti, sia *sabc* la più piccola. Sarà sempre possibile, prendendo un'altezza conveniente *Ax*, costruire un prisma retto avente per base il triangolo *ABC*, di cui il volume sia uguale alla differenza $P-p$ dei volumi delle due piramidi proposte.

Si divida l'altezza SA in parti uguali minori di Ax. e per i punti di divisione D, G, K, ecc. si conducano altrettanti piani paralleli al piano delle basi; le sezioni fatte da ciascuno di questi piani nelle due piramidi saranno equivalenti (n° 142), onde si avrà $DEF = def$, $GHI = ghi$, ecc.

Ciò premesso, sopra i triangoli ABC, DEF, GHI, ecc. presi per basi si costruiscano i prismi retti esterni $ABCN$, $DEFO$, $GHIP$, ecc., che abbiano per altezze le parti AD, DG, GK, ecc. dell'altezza SA. Parimente sopra i triangoli def, ghi klm, ecc. presi per basi si costruiscano nella seconda piramide i prismi retti interni $defo$, $ghip$; ec. dei quali le altezze saranno uguali alle altezze AD, DG, GK, ec. dei prismi esterni appartenenti alla prima piramide. Quindi tutti i prismi fin qui mentovati avranno per altezza comune AD.

La somma de' prismi esterni della piramide $SABC$ è maggiore del volume di questa piramide; al contrario la somma de' prismi interni della piramide $sabc$ è minore del volume di questa piramide; dunque per queste due ragioni, se si chiami S la somma de' prismi esterni, e s quella degli interni, dovrà essere la differenza $S - s$ maggiore della differenza $P - p$.

Or à partire dalle basi ABC, abc, il secondo prisma esterno $DEFO$ è equivalente al primo prisma interno defo (n° 142), poichè hanno basi equivalenti ed altezze uguali; sono equivalenti per la stessa ragione il terzo prisma esterno $GHIP$ ed il secondo interno $ghip$, il quarto esterno ed il terzo interno, e così in progresso fino all'ultimo degli uni e degli altri. Dunque tutti i prismi esterni della piramide $SABC$, eccetto il primo $ABCN$, hanno i loro equivalenti ne' prismi interni della piramide $sabc$; per conseguenza la differenza $S - s$ sarà uguale al prisma accennato $ABCN$. Ma per costruzione la differenza $P - p$ delle due piramidi è maggiore del prisma $ABCN$, dunque la differenza $S - s$ dei prismi sarà minore della differenza $P - p$ delle piramidi; il che è assurdo, perchè più sopra si è dimostrata maggiore: dunque la piramide $SABC$ non può essere maggiore della piramide $sabc$. Nello stesso modo si dimostrerà che non può essere minore, poichè basterà costruire i prismi esterni nella piramide $sabc$, e gl' interni nella piramide $SABC$; perciò le due piramidi sono equivalenti. (*)

PROPOSIZIONE LXI — *TEOREMA*.

146. *Ogni piramide triangolare obliqua è equivalente ad una piramide triangolare retta che ha la medesima base, e la medesima altezza* (fig. 27).

(*) La condizione particolare della piramide $ABCS$, di avere per costola la sua altezza AS, nulla toglie alla generalità della dimostrazione. Infatti, se le due piramidi rette fossero comunque, ciascuna di esse sarebbe equivalente ad una terza piramide avente eguale altezza, e base equivalente; e condizionata come la $ABCS$.

Dim. Sia *SD* l'altezza della piramide obliqua *SABC*. Si tirino le rette *BD*, *AD*, *CD*; indi si costruisca un triangolo *abc* uguale al triangolo *ABC*, e sopra *bc* si costruisca il triangolo *bcd* uguale al triangolo *BCD*, sarà il quadrilatero *abcd* uguale al quadrilatero *ABCD*. Ciò premesso, s'innalzi dal punto *o* sul piano *abcd* la perpendicolare $os = DS$, e si conducano le rette *sa*, *sb*, *sc*, *sd*, *ad*.

La piramide triangolare retta *SABD* è equivalente alla piramide triangolare retta *sabd*, dappoichè la base *ABD* della prima è uguale alla base *abd* della seconda, e l'altezza *SD* è uguale all'altezza *so* (n° 145). Parimente si dimostra che la piramide triangolare *SADC* è equivalente alla piramide triangolare *sadc*: per conseguenza la piramide quadrangolare *SABDC* è equivalente alla piramide quadrangolare *sabdc*. Ma la piramide triangolare retta *SBDC* è equivalente alla piramide triangolare retta *sbdc*: dunque se dalle due piramidi quadrangolari si tolgano queste due piramidi triangolari, resterà la piramide triangolare obliqua *SABC* equivalente alla piramide triangolare retta *sabc*.

147. *Corollario.* Dal teorema precedente si deduce evidentemente che: *due piramidi triangolari qualunque che hanno le basi equivalenti, e le altezze uguali, sono equivalenti.*

PROPOSIZIONE LXII — *TEOREMA.*

148. *Ogni piramide triangolare è equivalente alla terza parte del prisma triangolare della medesima base, e della medesima altezza* (fig. 36).

Dim. Sia *ABCD* una piramide triangolare. Per i punti *B*, e *C*, si conducano le rette *BE*, *CF* uguali e parallele ad *AD* (n° 27), indi si congiungano i punti *E*, *D*, *F* colle rette *ED*, *DF*, *FE*: con questa costruzione si formerà il prisma triangolare *AE*, il quale avrà la medesima base *ABC*, e la medesima altezza della piramide proposta.

Ciò premesso, per i tre punti *C*, *D*, *E*, si faccia passare un piano, questo dividerà la piramide quadrangolare *EBCFD* in due piramidi triangolari equivalenti *EBCD*, *ECFD*, poichè hanno basi uguali, e la stessa altezza, cioè la perpendicolare abbassata dal vertice comune *D* sul piano *EBCF*. Or considerando la piramide *ECFD* come se avesse per base il triangolo *EDF*, e per vertice il punto *C*, ne segue che le due piramidi *ECDF*, *ABCD* avranno basi uguali, ed altezze uguali; perciò queste due piramidi saranno uguali, ed il prisma triangolare sarà decomposto nelle tre piramidi triangolari equivalenti fra loro *ABCD*, *EBCD*, *ECFD*. Laonde la piramide proposta *ABCD* sarà la terza parte del prisma *AE*.

149. *Corollario* I. *Due prismi triangolari che hanno le basi equivalenti, e le altezze uguali sono equivalenti, perchè le piramidi loro terze parti sono equivalenti* (n°. 145).

150. *Corollario* II. Dal corollario precedente si deduce che un

prisma triangolare obliquo è equivalente ad un prisma triangolare retto di base equivalente e della stessa altezza, ma il prisma triangolare retto ha per misura il prodotto della base per l'altezza (n° 143); per conseguenza: *ogni prisma triangolare ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

151. *Corollario* III. Ma la piramide triangolare è la terza parte del prisma triangolare della stessa base, e della stessa altezza, dunque

Ogni piramide triangolare ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza.

152. *Corollario* IV. Potendosi ogni prisma poligono decomporre in prismi triangolari della stessa altezza (n° 106); ed ogni piramide poligona in piramidi triangolari della stessa altezza (n° 103), ne consegue che

1°. *Ogni prisma ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

2°. *Ogni piramide ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza; e per conseguenza.*

3°. *Ogni piramide è la terza parte del prisma della stessa base e della stessa altezza.*

PROPOSIZIONE LXIII — *TEOREMA.*

153. *Il piano che passa per le diagonali corrispondenti di due facce opposte di un parallelepipedo obliquo, lo divide in due prismi triangolari equivalenti* (fig. 30).

Dim. Sia il parallelepipedo obliquo *CH*, e per le diagonali corrispondenti *EF*, *BD* di due facce opposte qualunque si faccia passare il piano *EBDF*, il quale dividerà il parallelepipedo proposto nei due solidi *ABDH*, *BDCG*. In primo luogo questi due solidi sono prismi triangolari; poichè i triangoli *ABD*, *EFH*, avendo i loro lati uguali e paralleli, sono uguali fra loro, e nel tempo stesso le facce laterali sono tre parallelogrammi. Quindi il solido *ABDH* è una prisma triangolare, e lo stesso si dimostra pel solido *BDCG*.

In secondo luogo, i due prismi triangolari accennati sono equivalenti, perchè hanno basi uguali ed altezze uguali (n° 149), dunque il piano *EBDF* divide il parallelepipedo obliquo in due prismi equivalenti.

154. *Corollario* I. Poichè il prisma triangolare ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza (n° 150), apparisce dalla proposizione precedente che

Un parallelepipedo qualunque ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza; e per conseguenza

155. *Corollario* II. *Due parallelepipedi qualunque che hanno basi equivalenti, ed altezze eguali, sono equivalenti.*

Da ciò si conchiude ancora che due parallelepipedi sono equivalenti, se hanno la stessa base, o basi equivalenti, e sono come nella fig. 37 situati fra gli stessi piani paralleli; per la qual cosa si po-

trà sempre trasformare un parallelepipedo obliquo qualunque in un parallelepipedo rettangolo equivalente.

156. *Scolio.* Tutti i teoremi ricavati (n° 136 al n° 139) come corollarj della misura del parallelepipedo rettangolo si possono applicare a due parallelepipedi qualunque, a due prismi qualunque, ed anche a due piramidi qualunque. Ciò risulta da quanto fin qui si è esposto.

PROPOSIZIONE LXIV — *TEOREMA.*

157. *Se una piramide triangolare si tagli con un piano parallelo alla base, il tronco che resta togliendo la piccola piramide è equivalente alla somma di tre piramidi, che hanno per comune altezza quella del tronco, e per basi l'una la base inferiore del tronco, l'altra la base superiore, e l'ultima una media proporzionale fra queste due basi* (fig. 38).

Dim. Sia *ABCDEF* un tronco di piramide triangolare. Per i punti *A*, *E*, *C* si faccia passare un piano, il quale distaccherà dal tronco la piramide triangolare *ABCE* che ha per base la base inferiore del tronco, e per altezza l'altezza del tronco modesimo; poichè il vertice *E* si ritrova nel piano *DEF*: questa è la prima delle tre piramidi.

Rimane la piramide quadrangolare che ha per vertice il punto *E*, e per base il trapezio *DACF*. Per i tre punti *D*, *E*, *C* si faccia passare un piano, che dividerà la piramide accennata in due piramidi triangolari. La prima *EDFC* può considerarsi come avente per base il triangolo *DEF* e per vertice il punto *C*, per conseguenza avrà per base la base superiore del tronco, e la stessa altezza di esso. Dunque è questa la seconda piramide.

In quanto alla piramide *EDAC*, a fine di trasformarla in un'altra equivalente, si conduca pel punto *E* nel piano *ADEB* la retta *EK* parallela ad *AD*, e si uniscano *DK*, e *KC*. La piramide *EDAC* è equivalente alla piramide *ADCK*, perchè hanno la stessa base *ADC*, e la stessa altezza, essendo i loro vertici situati in una retta *EK* parallela ad *AD*, ovvero al piano *ADC*. Ma la piramide *DACK* può considerarsi come se avesse per base il triangolo *AKC*, e per vertice il punto *D*, resta dunque a dimostrare che la base *AKC* è media proporzionale fra le due basi del tronco. Infatti, essendo le rette *DE*, *DF* respettivamente parallele ad *AB*, *AC*, e rivolte dalla stessa parte, sarà l'angolo *EDF* uguale all'angolo *BAC*. Ma $DE=AK$, se dunque si considerano *DF*, ed *AC* come basi dei triangoli *DEF*, *AKC*, le perpendicolari abbassate dai vertici *E*, *K* su queste basi; ovvero le altezze dei due triangoli saranno uguali; e però i triangoli *DEF*, *AKC* staranno come le basi *DF*, *AC*. Ma i triangoli *AKC*, *ABC* stanno ancora come le basi *AK*, *AB*, ovvero come *DE*, *AB*, perchè hanno la stessa altezza: e per la simiglianza dei triangoli *DEF*, *ABC* si ha $DF : AC :: DE : AB$, dunque in fine sarà

$DEF : AKC :: AKC : ABC$.

PROPOSIZIONE LXV — *TEOREMA.*

158. *Il tronco a basi parallele di una piramide qualunque è equivalente alla somma di tre piramidi, che hanno per comune altezza quella del tronco, e le loro basi sono la base inferiore del tronco, la base superiore, ed una media proporzionale fra queste due basi* (fig. 28).

Dim. Sia *S* una piramide qualunque, *T* una piramide triangolare: si supponga che le basi *ABCD*, *MNP* sieno equivalenti, e situate in un medesimo piano; e che le altezze *SO*, *TQ* sieno uguali fra loro; indi si conduca un piano parallelo a quello delle basi che tagli le due piramidi.

Essendo per ipotesi le basi equivalenti, le sezioni *abcd*, *mnp* saranno ancora equivalenti (n° 102); per conseguenza le piramidi parziali *Sabcd*, *Tmnp* saranno equivalenti. Ma le piramidi intere sono equivalenti, perchè hanno basi equivalenti, ed altezze uguali, dunque il tronco della piramide poligona è equivalente al tronco della piramide triangolare; e però il tronco di una piramide qualunque sarà uguale alla somma delle tre piramidi indicate nell' enunciazione del teorema.

159. *Corollario.* Da ciò si deduce che

Il tronco di piramide a basi parallele ha per misura il terzo del prodotto della sua altezza per la somma delle sue due basi e di una media proporzionale fra queste due basi.

PROPOSIZIONE LXVI — *TEOREMA.*

160. *Se si taglia un prisma triangolare con un piano* DEF *inclinato alla base* ABC, *il tronco* ABCF *sarà uguale alla somma di tre piramidi, che hanno per base comune la base inferiore del tronco, e per vertici quelli della base superiore* (fig. 39).

Dim. Per i punti *A*, *E*, *C* si faccia passare un piano, il quale distaccherà dal tronco la piramide triangolare *ABCE*, che ha per base la base inferiore del tronco, e per vertice il punto *E* della base superiore.

Per i punti *D*, *E*, *C* si conduca un piano, il quale dividerà la piramide quadrangolare *EADFC* in due piramidi triangolari. La prima *EDAC* avendo per base il triangolo *DAC* e per vertice il punto *E*, sarà equivalente alla piramide *DACB*, che ha la stessa base, e la stessa altezza, essendo i vertici *E*, *B* situati nella retta *EB* parallela al piano *DAC*. Ma la piramide *DACB* può considerarsi come se avesse per base il triangolo *ABC*, e per vertice il punto *D*, dunque si ha la seconda piramide.

Rimane ora a considerare la piramide *EDFC*, la quale è equivalente alla piramide *AEFC*, poichè hanno la stessa base *ECF*, e la

stessa altezza, essendo i vertici D, A situati nella retta DA parallela al piano ECF. Ma la piramide $AEFC$ può considerarsi come se avesse per base il triangolo ACF, e per vertice il punto E, e perciò è equivalente alla piramide $ACFB$, che ha la stessa base e la stessa altezza, dunque la piramide $ECFD$ è equivalente alla piramide $ACFB$, la quale sarà la terza piramide richiesta, perchè si può considerare come se avesse per base il triangolo ABC; e per vertice il punto F.

161. *Corollario*. Dal teorema precedente s'inferisce che

Il prisma triangolare troncato ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della somma delle tre perpendicolari abbassate su questa base dai vertici opposti.

162. *Scolio*. Quando si ha un tronco di prisma triangolare retto, le perpendicolari abbassate dai vertici, D, E, F sulla base ABC si confondono cogli spigoli DA, EB, FC; e però ne consegue che

Il tronco di prisma triangolare retto ha per misura il prodotto della base pel terzo della somma dei suoi tre spigoli laterali.

PROPOSIZIONE LXVII — *TEOREMA*.

163. *Ogni poliedro si può trasformare in una piramide equivalente* (fig. 31).

Dim. Potendosi ogni poliedro decomporre in piramidi (n° 111), il suo volume risulterà dalla somma delle piramidi parziali, le quali in generale avranno diverse altezze. Così, abbiam veduto (n° 110) che se si prenda un punto O nell'interno di un parallelepipedo AG, le rette tirate da quel punto a tutt'i vertici del poliedro, lo dividono in sei piramidi quadrangolari, che hanno per vertice comune il punto O, e per basi le facce del poliedro medesimo. Quindi le altezze delle piramidi saranno le perpendicolari abbassate da quel vertice sopra ciascuna faccia. Or se si chiami L l'altezza della piramide $ABFEO$, non sarà difficile vedere che ciascuna delle cinque piramidi rimanenti potrà esser trasformata in una piramide equivalente, che abbia per altezza l'altezza L della piramide $ABFEO$; perocchè (n. 156) si è dimostrato che due piramidi sono equivalenti, allorchè hanno le basi in ragione reciproca delle altezze. Se per esempio, si chiami K l'altezza della piramide $CDHGO$, questa si potrà trasformare in un'altra equivalente, che abbia l'altezza L, ed una base M, che sarà determinata dalla proporzione

$$L : K :: CDHG : M.$$

Similmente si potranno determinare le basi N, P, Q, R delle piramidi, che hanno la comune altezza L, e sono equivalenti alle quattro restanti piramidi del parallelepipedo AG. Se dunque si costruisce una piramide, che abbia L per altezza, e per base un poligono S, equivalente alla somma de'poligoni $ABFE$, M, N, P, Q, R, essa sarà equivalente al parallelepido AG. La costruzione del poligono S si esegue facilmente riducendo prima quei poligoni ad altrettanti

quadrati; e però il parallelepipedo AG si può trasformare in una piramide equivalente. Ma è manifesto che la stessa costruzione può applicarsi ad un poliedro qualunque, dunque il teorema proposto è dimostrato.

164 *Scolio*. Si può facilmente vedere che a due piramidi si possono sempre sostituire due parallelepidi rettangoli ad esse rispettivamente equivalenti. Infatti, si può sempre costruire un parallelogrammo rettangolo equivalente al poligono, che forma la base di una delle due piramidi; ed in tal guisa si ha la base di uno de' due parallelepipedi: l'altezza sarà la terza parte dell'altezza della piramide medesima. Quindi se si sapesse trovare in linee il rapporto di due parallelepipedi rettangoli, si potrebbe ridurre il rapporto di due poliedri qualunque al semplice rapporto di due linee, come nella geometria piana si è fatto per due poligoni qualunque. Questo risultamento è della più grande importanza, e fa conoscere la potenza della geometria; dappoichè il rapporto di due linee si può sempre assegnare in numeri, sia esattamente, sia con quella approssimazione che si vuole; per conseguenza la riduzione del rapporto delle figure piane e solide a quello di due linee non solamente è per se stesso un mirabile concepimento geometrico; ma fa vedere ancora la possibilità di applicare alla pratica le speculazioni della geometria. Per queste ragioni ci occuperemo nella proposizione seguente del rapporto in linee di due parallelepipedi rettangoli.

PROPOSIZIONE LXVIII — *TEOREMA*.

165. *Il rapporto di due parallelepipedi rettangoli si può sempre esibire in linee* (fig. 33).

Dim. Siano AB, AD, AC le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo BM, ed ab, ad, ac quelle di un altro parallelepipedo rettangolo bm.

Si trovi una quarta proporzionale X in ordine alle tre linee ab, AB, AD, ed una quarta proporzionale Y in ordine alle tre linee AC, ad, ac. Dico che le due linee X, Y stanno fra loro come i due parallelepipedi BM, bm.

Infatti, essendo per costruzione

$$ab : AB :: AD : X,$$

sarà $AB \times AD = ab \times X$. Moltiplicando dall'una e dall'altra parte per AC, sarà $AB \times AD \times AC = AC \times ab \times X$.

Similmente essendo per costruzione

$$AC : ad :: ac : Y,$$

sarà $ad \times ac = AC \times Y$, e moltiplicando questi due prodotti eguali per ab, risulterà $ab \times ad \times ac = AC \times ab \times Y$. Quindi i due parallelepipedi proposti BM, e bm staranno fra loro come i due prodotti $AC \times ab \times X$, $AC \times ab \times Y$, ovvero come X a Y, poichè $AC \times ab$ è un fattore comune all'antecedente ed al conseguente; e però il teorema è dimostrato.

CAPITOLO IV.

DEI POLIEDRI SIMILI.

166. Dato un poliedro qualunque, è evidente che si può sempre concepire un altro poliedro; il quale sotto diversa estensione abbia la medesima figura. Questi due solidi saranno allora composti di di un medesimo numero di facce simili e similmente disposte, ed avranno gli angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno, come pure gli angoli solidi, ed in fine saranno ne'due poliedri proporzionali tutti gli spigoli omologhi, vale a dire quelli che caderebbero nella stessa direzione quando si soprapponesse un angolo solido di un poliedro al suo uguale nel poliedro simile.

167. Or siccome per determinare un poliedro non è necessario conoscere tutte le parti che lo compongono, così pure non è necessario verificare tutti i caratteri di simiglianza sopraccennati per concludere che due poliedri sono simili. Quindi si possono definire i poliedri simili nel modo qui appresso.

168. *Definizione*. Due poliedri si dicono *simili* quando hanno tutte le loro facce simili, similmente disposte, e gli angoli solidi formati dalle facce omologhe rispettivamente uguali. (*)

PROPOSIZIONE LXIX — *TEOREMA*.

169. *Se si taglia una piramide con un piano parallelo alla base, la piramide parziale sarà simile alla piramide intera* (fig. 28).

Dim. Sia la piramide *SABCD* tagliata da un piano *abcd* parallelo alla base; dico, che la piramide *Sabcd* è simile a *SABCD*. Infatti, tutte le facce dell' una sono simili alle facce dell' altra; e però gli spigoli omologhi sono proporzionali, e gli angoli piani degli angoli solidi omologhi sono uguali ciascuno a ciascuno. Inoltre è evidente che gli angoli diedri omologhi sono uguali; dunque saranno ancora uguali gli angoli solidi omologhi (n. 80); e per conseguenza le due piramidi sono simili.

PROPOSIZIONE LXX — *TEOREMA*.

170. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno gli angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente situati* (fig. 40).

(*) Qualche *restauratore* di Euclide ha trovato a ridire su questa definizione de' poliedri simili, dovuta al celebre geometra Roberto Simson. Ma essa è stata giudicata esatta dai Matematici; e non può mai dar luogo a veruno equivoco, se si terranno presenti le considerazioni, che precedono la definizione medesima.

Dim. Siano *SABC*, e *sabc* due piramidi triangolari che abbiano i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente situati: gli angoli triedri *S*, e *s* avendo i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti, sono uguali fra loro (n. 77), e per conseguenza hanno gli angoli piani uguali. Lo stesso si può dimostrare per gli angoli triedri *A*, ed *a*; come pure per gli angoli triedri *B*, e *b*. Quindi i due triangoli *ASB*, ed *asb* sono equiangoli, e perciò simili. Nello stesso modo si dimostra la simiglianza delle altre facce delle due piramidi triangolari, dunque queste piramidi sono simili.

PROPOSIZIONE LXXI — *TEOREMA.*

171. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno una faccia simile adiacente a tre angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno* (fig. 40).

Dim. Nelle piramidi triangolari *SABC*, *sabc* siano *ABC*, *abc* le due facce simili, gli angoli triedri *A* ed *a* saranno uguali, perchè hanno un angolo piano uguale adiacente a due angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti (n. 79); per conseguenza saranno uguali gli angoli diedri *SA*, *sa*; e nello stesso modo si dimostrerà l'uguaglianza degli altri angoli diedri. Dunque (n. 176) le due piramidi triangolari sono simili.

PROPOSIZIONE LXXII — *TEOREMA.*

172. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce rispettivamente simili e similmente disposte* (fig. 40).

Dim. Sia l'angolo diedro *SA* uguale all'angolo diedro *sa*, e le facce *SAB*, *SAC* che comprendono il primo sieno rispettivamente simili alle facce *sab*, *sac* che comprendono il secondo; gli angoli triedri *S*, *s* risultano uguali, perchè hanno un angolo diedro uguale compreso fra due angoli piani uguali ciascuno a ciascuno (n. 78); per conseguenza sono uguali gli angoli diedri *SB*, e *sb*. Parimente gli angoli triedri *A*, ed *a* saranno uguali, perchè hanno un angolo diedro uguale compreso fra due angoli piani uguali ciascuno a ciascuno e similmente disposti; perciò saranno uguali gli angoli diedri *AB*, ed *ab*.

Quindi le due piramidi triangolari proposte hanno le facce simili *ASB*, *asb* adiacenti a tre angoli diedri rispettivamente uguali e similmente situati; e però sono simili (n. 171).

PROPOSIZIONE LXXIII — *TEOREMA.*

173. *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno tre facce simili ciascuna a ciascuna e similmente disposte* (fig. 40).

Dim. Siano le facce *ASB*, *ASC*, *BSC* rispettivamente simili alle facce *asb*, *asc*, *bsc* e similmente disposte. Gli angoli triedri *S*, e *s* saranno uguali, poichè hanno i loro tre angoli piani uguali ciascuno a ciascuno e similmente situati; e per conseguenza risultano uguali gli angoli diedri *SA*, *sa*; e le due piramidi proposte saranno simili in virtù del teorema precedente.

PROPOSIZIONE LXXIV — *TEOREMA.*

174. *Due piramidi triangolari simili hanno i loro spigoli omologhi proporzionali alle altezze* (fig. 40).

Dim. Siano *SABC*, *sabc* due piramidi triangolari simili. Facendo coincidere l'angolo triedro *s* col suo uguale *S*, la piramide *sabc* verrà rappresentata dalla piramide *SEDF*. La retta *ED* sarà parallela ad *AB*, perchè l'angolo *SED*=*SAB*; e per la stessa ragione la retta *DF* sarà parellela a *BC*. Quindi il piano *EDF* sarà parallelo al piano *ABC* (n. 42). Or se dal punto *S* si abbassi la perpendicolare sopra uno di questi piani, essa sarà ancora perpendicolare all'altro. Siano *SO*, *SG* le altezze delle due piramidi prese sopra questa perpendicolare, in virtù dei piani paralleli *EDF*, *ABC*, si avrà (n. 100),

$$SA : SE :: SO : SG,$$

per conseguenza le altezze sono proporzionali agli spigoli omologhi.

PROPOSIZIONE LXXV — *TEOREMA.*

175. *Due poliedri simili sono composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simili rispettivamente e similmente disposte* (fig. 32.)

Dim. Siano *SAB*, *ABCD*, *CDE* tre facce consecutive del primo poliedro, e *sab*, *abcd*, *cde* le tre facce omologhe del secondo. Supponiamo che i due poliedri siano decomposti in piramidi aventi per vertici i punti omologhi *S*, *s*, e per basi le facce dei poliedri medesimi; supponiamo inoltre che queste piramidi siano divise in piramidi triangolari aventi per vertici gli stessi punti S, *s*; e si tirino le diagonali *SC*, *SD*, *SE*, *sc*, *sd*, *se*, come pure le rette *AC*, *ac*.

Le due facce *ABCD*, *abcd* essendo simili per ipotesi saranno ancora simili i triangoli *ABC*, *abc*.

Da un'altra parte sono uguali gli angoli diedri *CBAS*, *cbas*, poichè essendo simili i poliedri sono uguali gli angoli solidi omologhi, dunque le due piramidi triangolari *SABC*, *sabc* hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce simili rispettivamente e similmente disposte, perciò saranno simili. Dal che si deduce la simiglianza delle facce omologhe *ASC*, *asc*, e l'uguaglianza degli angoli diedri *SABC*, *sabc*. Gli angoli diedri *SACD*, *sacd* saranno ancora uguali, perchè sono supplementi dei precedenti. Di più, i triangoli

ADC, *adc* sono simili, dunque le due piramidi triangolari *SACD*, *sacd* hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce simili ciascuna a ciascuna e similmente disposte; e però queste piramidi sono simili. Da ciò si conclude la simiglianza delle facce omologhe *DSC*, *dsc*, e l' uguaglianza degli angoli diedri *SDCA*, *sdca*. Or essendo simili i poliedri, gli angoli diedri omologhi *EDCA*, *edca* sono uguali, perchè sono uguali gli angoli solidi omologhi. Se dunque da questi ultimi angoli diedri si tolgono i precedenti, i rimanenti angoli diedri *SCDE*, *scde* saranno uguali. Ma i triangoli *DCE*, *dce* sono simili (e lo sarebbero ancora se in luogo di essere facce omologhe dei due poliedri, facessero semplicemente parte di due facce omologhe); dunque le due piramidi triangolari *SCDE*, *scde* hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce simili rispettivamente e similmente disposte, e perciò sono simili.

Continuando nello stesso modo, si potrà dimostrare progressivamente la simiglianza di tutte le piramidi triangolari che compongono i due poliedri proposti.

PROPOSIZIONE LXXVI — *TEOREMA*.

176. *Nei poliedri simili gli spigoli omologhi, le diagonali omologhe delle facce omologhe, e le diagonali interne omologhe sono proporzionali* (fig. 32).

Dim. Infatti, 1° dalla simiglianza delle facce omologhe dei due poliedri si deducono le proporzioni
SA : *sa* :: *AB* : *ab* :: *CD* : *cd* :: *DE* : *de*, ecc. e però gli spigoli omologhi sono proporzionali.

2°. Si considerino due diagonali omologhe, per esempio, *AC*, *ac* di due facce omologhe *ABCD*, *abcd*, è manifesto che le diagonali accennate sono proporzionali agli spigoli omologhi *AB*, *ab*. Parimente le diagonali omologhe di due altre facce omologhe sono proporzionali a due spigoli omologhi; ma tutti gli spigoli omologhi sono proporzionali, dunque le diagonali omologhe delle facce omologhe sono proporzionali.

3°. Finalmente, se si considerano due diagonali omologhe interne, per esempio, *SE*, *se*, queste saranno proporzionali agli spigoli omologhi *CD*, *cd*, in virtù della simiglianza delle piramidi *SCDE*, *scde*, dunque le diagonali interne omologhe sono proporzionali.

PROPOSIZIONE LXXVII — *TEOREMA*.

177. *Le superficie dei poliedri simili stanno fra loro come i quadrati degli spigoli omologhi* (fig. 32).

Dim. Le aje dei poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi, dunque sarà la faccia *SAB* alla faccia *sab* come il quadrato di *AB* al quadrato di *ab*. Parimente sarà la faccia *ABCD*

alla faccia *abcd* come il quadrato di *AB* al quadrato di *ab*, e la faccia *DCE* alla faccia *dce* come il quadrato di *DC* al quadrato di *dc*. Ma tutti gli spigoli omologhi dei poliedri simili sono proporzionali, e però sono proporzionali anche i loro quadrati; dunque sarà la faccia *ASB* alla faccia *asb* come la faccia *ABCD* ad *abcd*, e come *DCE* a *dce*, ecc,

Quindi la somma di tutte le facce del primo poliedro sarà alla somma di tutte le facce del secondo come una faccia qualunque dell'uno sta alla faccia omologa dell'altro, ovvero come il quadrato di uno spigolo del primo sta al quadrato di uno spigolo omologo del secondo. Dunque le superficie dei poliedri simili stanno fra loro come i quadrati degli spigoli omologhi.

PROPOSIZIONE LXXVIII — *TEOREMA*.

178. *I poliedri simili stanno fra loro come i cubi degli spigoli omologhi* (fig. 40)

Dim. Si considerino in primo luogo le due piramidi triangolari simili *SABC*, *sabc*. Or due piramidi stanno fra loro in ragion composta dalla ragione delle basi *ABC*, *abc*, e dalla ragione delle altezze *SO*, *so*. Ma le basi essendo simili stanno fra loro come i quadrati de' lati omologhi, e questi lati sono proporzionali alle altezze (n. 100), dunque le due piramidi sono in ragion triplicata de' lati omologhi, ovvero come i cubi di questi lati.

Ciò premesso, passiamo a considerare due poliedri simili qualunque (fig. 32), che si potranno concepire divisi in un medesimo numero di piramidi triangolari simili rispettivamente e similmente disposte. Ciascuna delle piramidi del primo poliedro, per esempio; *SABC* starà alla sua omologa *sabc* nell' altro, come il cubo di uno dei suoi spigoli *AB* sta al cubo dello spigolo omologo *ab* dall' altra piramide, ma tutti questi spigoli sono nei due poliedri nel medesimo rapporto, poichè sono necessariamente o gli spigoli omologhi dei poliedri proposti, o le diagonali omologhe delle loro facce omologhe, o infine le diagonali omologhe interne; per conseguenza i loro cubi formeranno una serie di rapporti uguali, e questi rapporti essendo uguali a quelli delle piramidi, si concluderà che questi ultimi rapporti sono uguali fra loro. Laonde la somma delle piramidi costituenti il primo poliedro starà alla somma delle piramidi costituenti il secondo, come una qualunque piramide *SABC* dell' uno sta alla corrispondente piramide *sabc* dell'altro, ovvero come il cubo di uno spigolo del primo poliedro sta al cubo dello spigolo omologho del secondo. Mettendo in luogo delle piramidi i poliedri da esse composti, ne risulterà che i poliedri simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.

CAPITOLO V.

DEI POLIEDRI SIMMETRICI.

179. Per essere uguali due piramidi triangolari non basta che abbiano le loro facce uguali ciascuna a ciascuna, ma si richiede ancora che queste facce sieno disposte nello stesso ordine; poichè se fossero disposte in ordine inverso non potrebbero affatto coincidere, stante la simmetria degli angoli solidi. Conviene adunque considerare le figure solide, nella costituzione delle quali entrano gli angoli solidi simmetrici.

PROPOSIZIONE LXXIX — *PROBLEMA*

180. *Se due piramidi triangolari, che hanno le facce rispettivamente eguali, ma disposte in ordine inverso, sono situate in modo che due facce eguali coincidano, il piano della faccia comune sarà perpendicolare alla retta congiungente i vertici opposti, e la dividerà in due parti eguali* (fig: 41).

Dim. Siano $SABC$, e $S'ABC$ le due piramidi triangolari proposte: sia O il punto di mezzo della retta SS' che unisce i vertici opposti alla base comune ABC; si conducano le rette AO, BO, CO. Essendo $AS = AS'$, il triangolo SAS' sarà isoscele, e per conseguenza la retta AO è perpendicolare alla retta SS'. Parimente essendo $BS = BS'$, e $CS = CS'$, le rette BO, e CO sono perpendicolari a SS'. Dunque (n° 13) le tre rette AO, BO, CO si trovano nel piano che sarebbe prodotto dal rivolgimento dell'angolo retto SOC intorno al lato SO supposto immobile; ma questo piano contiene i tre punti A, B, C; dunque esso è il piano della faccia comune ABC.

181. *Scolio.* Dalla proposizione precedente è derivato che due piramidi triangolari si dicono *simmetriche* quando hanno le loro facce uguali ciascuna a ciascuna e disposte in ordine inverso; dappoichè possono essere situate simmetricamente rispetto a un medesimo piano, cioè in modo che i vertici degli angoli solidi omologhi sono situati a distanze uguali dal piano accennato, sopra una medesima retta perpendicolare a questo piano.

PROPOSIZIONE LXXX — *TEOREMA.*

182. *Due piramidi triangolari simmetriche hanno gli angoli diedri omologhi rispettivamente uguali, e gli angoli triedri omologhi simmetrici* (fig. 42).

Dim. Siano le due piramidi simmetriche $SABC$, $sabc$ nelle quali sia la faccia $SBA = sba$, $SBC = sbc$, $SCA = sca$, e $CBA = cba$.

Essendo uguali le facce omologhe, gli angoli piani omologhi di queste facce saranno rispettivamente uguali; e gli angoli triedri o-

mologhi saranno composti di angoli piani rispettivamente uguali; per conseguenza (n° 70) l'angolo diedro di due facce contigue qualunque in una delle piramidi proposte sarà uguale all'angolo diedro delle facce omologhe nell'altra: ma queste facce sono disposte in ordine inverso, dunque gli angoli solidi omologhi saranno simmetrici.

PROPOSIZIONE LXXXI — *TEOREMA.*

183. *Una piramide triangolare non può avere che una sola simmetrica* (fig. 42).

Dim. Infatti, se si voglia formare una piramide simmetrica alla piramide *SABC*, vi dovrà essere sempre un angolo triedro formato da tre angoli piani *BSA*, *BSC*, *ASC* disposti in ordine inverso a quello, in cui sono disposti nella piramide *SABC*. Or si è dimostrato (n° 76) che questi tre angoli non si possono disporre che in due soli modi diversi, dunque le tre facce *BSA*, *BSC*, *ASC* non si possono disporre che in due soli modi differenti: ma quando queste facce si saranno riunite in un punto per formare l'angolo simmetrico all'angolo *S*, la quarta faccia trovasi determinata, dunque non può esservi che una sola piramide *sabc* simmetrica alla piramide *SABC*.

184. *Scolio.* Le proposizioni dimostrate nei paragrafi 113, 115, 116, e 117 si verificano ancora quando gli elementi rispettivamente eguali nelle due piramidi, sono in esse inversamente disposti, solamente in vece di dire che le piramidi sono *uguali*, si dirà che sono *simmetriche*; e così si avranno diversi criterj per giudicare della simmetria delle piramidi triangolari. Infatti, se si suppone costrutta una piramide, simmetrica ad una delle due piramidi proposte, essa in virtù delle proposizioni sopraccennate dovrà risultare uguale all'altra piramide proposta; e però le due piramidi proposte saranno simmetriche fra loro.

PROPOSIZIONE LXXXII — *TEOREMA*

185. *Se da tutti i vertici di un poliedro, decomposto in piramidi triangolari, si abbassino delle rette perpendicolari ad un medesimo piano, e si prolunghino al di là di questo piano di quantità uguali ad esse medesime, le estremità di queste perpendicolari saranno i vertici di un nuovo poliedro, che potrà essere decomposto in un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche a quelle del primo ed inversamente disposte* (fig. 43.)

Dim. Sia *S* il vertice di tutte le piramidi costituenti il poliedro proposto; *A*, *B*, *C*, *D*, ecc. dinotino differenti vertici del poliedro medesimo, ed *s*, *a*, *b*, *c*, *d*, ecc. i punti corrispondenti del secondo poliedro determinati nel modo sopraccennato. Finalmente siano *M* e *N*, i punti di mezzo delle rette *Ss*, e *Bb*, vale a dire i piedi di queste perpendicolari nel piano *PQ*, su cui sono state abbassate.

Le rette Ss, e Bb, essendo perpendicolari a un medesimo piano PQ, sono parallele fra loro, e per conseguenza sono situate in un medesimo piano; inoltre sono perpendicolari alla retta MN che unisce i loro piedi nel piano PQ, perciò immaginando che il trapezio $bsMN$ giri intorno alla retta MN, esso potrà combaciare col trapezio $BSMN$, e però si avrà $SB=sb$. Nello stesso modo si dimostrerà che $SA=sa$, $SC=sc$, $AB=ab$, $BC=bc$; e per conseguenza le due piramidi triangolari $SABC$, $sabc$, avranno le facce uguali ciascuna a ciascuna; ma queste sono inversamente disposte, dunque le piramidi accennate sono simmetriche fra loro. Similmente si potrà dimostrare che le piramidi triangolari $SACD$, $sacd$ sono simmetriche, e così di seguito. Dunque i due poliedri sono composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche rispettivamente; e da un'altra parte è manifesto che queste piramidi si trovano inversamente disposte nei due poliedri. Infatti basta per veder ciò chiaramente osservare la fig. 41, dove i due poliedri sono situati l'uno accanto all'altro.

PROPOSIZIONE LXXXIII — *TEOREMA.*

186. *Reciprocamente, due poliedri composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche inversamente disposte, possono essere situati in modo che le rette, le quali uniscono i vertici omologhi sieno divise in due parti uguali da un medesimo piano perpendicolare a tutte queste rette* (fig. 41.)

Dim. Sieno S, s i due poliedri proposti. Da tutti i vertici del poliedro S si abbassino delle perpendicolari sopra un piano qualunque, le quali si prolunghino al di sotto di questo piano di quantità uguali ad esse medesime, si formerà un nuovo poliedro, che chiameremo S'. I poliedri, S e S' in virtù della proposizione precedente saranno composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche inversamente disposte. Ma i due poliedri proposti S, e s sono anch'essi per supposizione composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche inversamente disposte, e da un'altra parte una piramide triangolare non può aver che una sola simmetrica (n° 183), dunque i poliedri s, e S' sono composti di un medesimo numero di piramidi triangolari uguali ciascuna a ciascuna, e similmente disposte; e per conseguenza questi poliedri sono uguali fra loro (n° 122).

Da ciò si deduce che il poliedro s può esser soprapposto al poliedro S', ed in questa situazione del poliedro s rispetto a S, il piano sopra nominato dividerà in due parti uguali tutte le rette che uniscono i loro vertici omologhi, e sarà perpendicolare a queste medesime rette.

187. *Scolio* I. Dalla proposizione precedente è derivato che due poliedri son detti *simmetrici* fra loro quando si possono decomporre in un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche ed in-

versamente disposte; dappoichè possono sempre essere situati simmetricamente rispetto a un medesimo piano. Quindi il Legendre, che fu primo a parlare dei poliedri simmetrici, non li considera se non relativamente alla posizione che possono avere rispetto ad un medesimo piano.

Infatti, definisce i poliedri simmetrici dicendo esser quelli che, avendo una base comune, sono costrutti similmente l'uno al di sopra del piano di questa base, l'altro al di sotto, con questa condizione che i vertici degli angoli solidi omologhi siano situati ad eguali distanze dal piano della base, sopra una medesima retta perpendicolare a questo piano.

Partendo da questa definizione il lodato geometra ha dato alcune proposizioni intorno ai poliedri simmetrici, ma sembra che con tale procedimento rimanga nascosto il cammino da esso seguito per arrivare ad una sì bella scoperta.

188. *Scolio* II. La proposizione precedente prova che un poliedro non può avere che un solo simmetrico, e la proposizione (n° 185) offre il mezzo di costruire un poliedro simmetrico ad un poliedro dato.

PROPOSIZIONE LXXXIV — *TEOREMA.*

189. *Due poliedri simmetrici hanno le facce omologhe rispettivamente uguali, gli angoli diedri omologhi essi pure rispettivamente uguali, e gli angoli solidi omologhi simmetrici* (fig. 41).

Dim. Sieno *SABC*, *SACD*, ecc, le piramidi costituenti uno dei poliedri proposti, e *sabc*, *sacd*, ecc. le piramidi omologhe costituenti l'altro poliedro.

1° È manifesto che le facce omologhe dei due poliedri sono composte di facce omologhe ed uguali delle piramidi costituenti, e per conseguenza le facce omologhe dei due poliedri simmetrici sono uguali.

2° Due angoli diedri omologhi dei due poliedri sono angoli diedri omologhi, come *AB*, *ab*, delle piramidi costituenti; o sono composti di un medesimo numero di angoli diedri omologhi delle piramidi medesime, come avviene per gli angoli diedri omologhi *CA*, *ca*, che sono composti degli angoli diedri *SCAB*, *SCAD*, *scab*, *scad*. In ambedue i casi gli angoli diedri omologhi dei due poliedri saranno uguali.

3° Finalmente gli angoli solidi omologhi dei due poliedri sono composti degli angoli triedri omologhi delle piramidi costituenti, come può vedersi negli angoli solidi, *A*, ed *a*, che sono composti degli angoli triedri *ASBC*, *ASCD*, *asbc*, *ascd* omologhi, e disposti in ordine inverso, perchè queste stesse piramidi sono disposte inversamente nei due poliedri. Ma gli angoli triedri accennati sono simmetrici, dunque lo saranno ancora gli angoli solidi omologhi dei due poliedri.

PROPOSIZIONE LXXXV — *TEOREMA.*

190. *Due poliedri sono simmetrici quando hanno le facce rispettivamente uguali, disposte in ordine inverso, e gli angoli diedri omologhi essi pure rispettivamente uguali* (fig. 44).

Dim. Siano S, s i due poliedri proposti, e supponiamo che siasi costrutto un terzo poliedro S' simmetrico al poliedro S; esso avrà con questo poliedro (n. 199) gli angoli diedri omologhi eguali, e le facce omologhe eguali ed inversamente disposte. Per conseguenza i poliedri S', s, avranno gli angoli diedri rispettivamente eguali, e le facce omologhe eguali e similmente disposte, e perciò saranno eguali (n. 124.) E poichè i poliedri S, S' sono simmetrici, lo saranno pure i poliedri proposti S, s.

PROPOSIZIONE LXXXVI — *TEOREMA.*

191. *Due prismi sono simmetrici quando hanno un angolo solido simmetrico compreso fra facce omologhe uguali ciascuna a ciascuna* (fig. 29).

Dim. Supponiamo che nei due prismi CF, cf sia l'angolo triedro A simmetrico all'angolo triedro a, la faccia $ABD=abd$, $AK=ag$, ed $AG=ak$. Se si costruisce un terzo prisma, che chiameremo $C'F'$, simmetrico al prisma CF, questi due prismi avranno le facce omologhe rispettivamente uguali, e gli angoli solidi omologhi simmetrici fra loro (n° 188). Dunque i due prismi $C'F'$, e cf avranno un angolo solido uguale compreso tra facce respettivamente uguali; perciò saranno uguali (n. 119), ed essendo simmetrici i prismi CF, $C'F'$, lo saranno pure i prismi proposti CF, cf.

PROPOSIZIONE LXXXVII — *TEOREMA.*

192. *Il piano che passa per le diagonali corrispondenti di due facce opposte di un parallelepipedo, lo divide in due prismi triangolari simmetrici fra loro* (fig. 30).

Dim. Infatti, i due prismi triangolari $ABDEFH$, $BCDFGE$ hanno le facce AE, CF uguali come facce opposte del parallelepipedo; hanno pure le facce uguali DH, CE per la stessa ragione, ed è poi il triangolo ABD uguale al triangolo EGF, dunque i due prismi accennati hanno gli angoli solidi A, e G compresi tra facce omologhe rispettivamente uguali ma questi angoli solidi sono simmetrici (n° 107), dunque (n° 191) i due prismi sono simmetrici fra loro.

PROPOSIZIONE LXXXVIII — *TEOREMA.*

193. *Due poliedri simmetrici sono equivalenti fra loro* (fig. 41).

Dim. Infatti, 1° Due piramidi triangolari simmetriche *SABC*, e *S'ABC* sono equivalenti, poichè hanno una medesima base *ABC* ed uguali altezze *SO*, *S'O*.

2° Due poliedri simmetrici sono composti di un medesimo numero di piramidi triangolari simmetriche, dunque essendo equivalenti le piramidi accennate, saranno pure equivalenti i poliedri simmetrici.

194. *Scolio*. Apparisce dal teorema precedente che i poliedri simmetrici costituiscono un genere intermedio fra i poliedri uguali, ed i poliedri equivalenti; il che non avviene nelle figure piane rettilinee, dove fra l'uguaglianza e l'equivalenza di queste figure non esiste alcuno stato intermedio. Una siffatta dottrina fu totalmente ignota agli antichi geometri, i quali perciò hanno a noi tramandata una teorica imperfetta dei poliedri.

CAPITOLO VI.

DEI POLIEDRI REGOLARI.

195. Un poliedro dicesi *regolare* quando tutte le facce sono poligoni regolari, uguali, e tutti i suoi angoli solidi sono pure uguali fra loro.

196. Or il più semplice di tutti i poligoni regolari è il triangolo equilatero, di cui ciascun angolo equivale a due terzi di un angolo retto: se dunque si riunissero più triangoli equilateri per formare un angolo solido, non se ne potrebbero adoperare che tre, quattro, o cinque; dappoichè sei dei loro angoli piani riuniti equivalgono a sei volte due terzi di un angolo retto, ovvero a quattro angoli retti, e perciò non possono formare un angolo solido (n. 67). Con più ragione non se ne potrebbero prendere più di sei. Laonde non possono esistere che tre specie di poliedri regolari con facce triangolari.

197. Dopo il triangolo equilatero viene il quadrato, di cui ciascun angolo è retto. Se dunque si prendano più quadrati per formare un angolo solido, non se ne potranno adoperare che tre; e per conseguenza non può esistere che un solo poliedro con facce quadrate.

198. Quanto al pentagono regolare, ciascuno dei suoi angoli equivale a sei quinti di un angolo retto, onde non si potrebbero adoperare più di tre degli angoli accennati per formare un angolo solido. Quindi un solo poliedro regolare può esistere con facce pentagonali.

199. L'angolo di un esagono regolare vale quattro terzi; di un angolo retto, tre dei quali fanno quattro retti; e perciò non possono formare un angolo solido. Dunque non può esistere nessun poliedro regolare con facce esagonali. Similmente non può esistere alcun po-

liedro con facce ettagonali, ottagonali, ecc., perchè ciascun angolo dell'ettagono regolare, dell'ottagono regolare, e di tutti gli altri poligoni regolari di maggior numero di lati, è maggiore di quello dell'esagono regolare.

200. Dalle cose precedenti si deduce che possono esistere soltanto cinque poliedri regolari, e sono

1. Il *tetraedro, regolare, o piramide triangolare regolare*, formata da quattro triangoli equilateri uguali.

2. L'*esaedro regolare*, o *cubo*, formato da sei quadrati uguali.

3. L'*ottaedro regolare*, formato da otto triangoli equilateri uguali.

4. Il *dodecaedro regolare*, formato da dodici pentagoni regolari uguali.

5. L'*icosaedro regolare*, formato da venti triangoli equilateri uguali.

201. I geometri si sono occupati a dare le costruzioni di questi poliedri; ma siccome non si parla di essi negli elementi, così rimettiamo chi volesse conoscerle al Lib. XIII degli Elementi di Euclide, alla Geometria Solida del Caravelli, ad una Appendice di quella del Legendre, ecc. Qui ci limeteremo ad osservare che gli antichi geometri davano specialmente il nome di *tetraedro, esaedro, ottaedro, dodecaedro, icosaedro* ai cinque poliedri regolari, perchè non si sono occupati dei poliedri in generale, ma delle piramidi, dei prismi, e de'poliedri regolari.

CAPITOLO VII.

DELLA MISURA DELLE SUPERFICIE DE' POLIEDRI.

202. La superficie di un poliedro qualunque essendo composta di poligoni, che si sanno misurare, si avrà la misura della superficie totale di esso poliedro con fare la somma delle aje di tutte le sue facce. Quindi ci limiteremo a dare in questo luogo la misura della superficie laterale o convessa di un prisma, e quella della piramide regolare; non solo perchè siffatte misure possono ammettere una enunciazione particolare, ma anche perchè si dovrà farne uso in appresso.

PROPOSIZIONE LXXXIX — *TEOREMA*.

203. *La superficie laterale o convessa di un prisma qualunque ha per misura il prodotto di uno de' suoi spigoli laterali per lo perimetro di una sezione perpendicolare a questo spigolo* (fig. 29).

Dim. Infatti, essendo tutti gli spigoli del prisma *abck* eguali e paralleli fra loro, si potranno considerare come basi de' parallelogrammi, che compongono la superficie laterale del prisma medesimo. Quindi se si taglia il prisma con un piano perpendicolare agli

spigoli, il perimetro della sezione sarà la somma delle altezze de' parallelogrammi accennati. Ma ogni parallelogrammo ha per misura il prodotto della base per l'altezza, dunque il perimetro della sezione *lmnq* moltiplicato per uno degli spigoli laterali del prisma sarà la misura della superficie laterale di questo prisma.

204. *Corollario* I. Quando il prisma è retto, tutt'i suoi spigoli laterali sono perpendicolari alla base; per conseguenza

La superficie laterale o convessa di un prisma retto ha per misura il prodotto del perimetro della base per l'altezza.

205. *Corollario* II. La superficie laterale di un prisma qualunque è equivalente a quella di un rettangolo, che avesse per base una linea retta eguale al perimetro della sezione *lmnq*, e per altezza uno degli spigoli laterali.

206. *Scolio*. È manifesto che se si volesse avere la misura della superficie totale di un prisma, basterebbe aggiungere le superficie delle due basi alla superficie laterale.

PROPOSIZIONE XC — *TEOREMA*.

207. *La superficie laterale o convessa della piramide regolare ha per misura il prodotto del perimetro della sua base per la metà dell'apotema* (fig. 49).

Dim. Sia *SO* l'altezza della piramide regolare *SABD*. Essendo il punto *O* il centro del poligono regolare *ABCDE* (n° 90), le oblique *SA*, *SB*, *SC*, ecc. saranno egualmente distanti dalla perpendicolare *SO*; e però saranno isosceli ed eguali i triangoli *ASB*, *BSC*, *CSD*, ecc., che compongono la superficie convessa della piramide regolare. Ma ciascuno di questi triangoli, come *ASB*, ha per misura il prodotto della sua base *AB* per la metà della sua altezza *SH*, che è l'apotema della piramide, dunque la superficie convessa di questa avrà per misura il prodotto del perimetro *ABCDE* della base per la metà dell'apotema *Sh*.

208. *Scolio* I. Si può ora vedere facilmente che se si taglia la piramide regolare *SABD* con un piano *abce* parallelo alla base, la superficie convessa del tronco di piramide regolare, che si compone de' trapezj *Ab*, *Bc*, *Cd*, ecc. avrà per misura la porzione *Hh* dell'apotema *SH* moltiplicato per la semi-somma de' perimetri delle due basi del tronco piramidale.

209. *Scolio* II. La piramide di cui è parola, è stata impropriamente chiamata *piramide regolare*.

Infatti, dal capitolo precedente si deduce che la piramide regolare propriamente detta è il tetraedro regolare. Or la piramide accennata può esser un tetraedro regolare, ma può essere ancora un solido assai diverso da questo, sia che abbia per base un triangolo equilatero, sia che abbia per base qualsivoglia altro poligono regolare. La piramide regolare non è che una specie di piramide retta; denominazione da noi introdotta per conservare l'analogia tra la teo-

rica delle piramidi e quella de' prismi. La necessità di una siffatta denominazione apparisce qui manifesta, perchè con essa sola si potrebbe togliere dalla scienza l'equivoco che nasce dal chiamare piramide regolare un poliedro che non è regolare, se non in un solo caso particolarissimo, mentre se si considerasse come una specie di piramide retta, svanirebbe ogni equivoco.

LIBRO III.

DEI TRE CORPI ROTONDI, E DEI TRIANGOLI SFERICI.

CAPITOLO I.

NOZIONI E DEFINIZIONI PRELIMINARI.

210. I solidi, de'quali fin qui si è parlato, sono terminati da superficie piane; ma oltre questi solidi la geometria elementare neconsidera tre altri, cioè il *cilindro retto*, il *cono retto*, e la *sfera*, ai quali si da il nome di *corpi rotondi*, perchè i due primi sono terminati da superficie curve e da superficie piane, e l'ultima da una sola superficie curva.

211. Il *cilindro retto* (fig. 45) è il solido prodotto dalla rotazinne di un rettangolo *ABCD* intorno ad un suo lato immobile *AB*. Questo lato chiamasi *asse* del cilindro; i cerchi *DHE*, *CGF* descritti dai lati *AD*, *BC* ne sono le *basi*, e la linea *CD*, che genera la *superficie curva* del cilindro, dicesi *lato*. Finalmente l' *altezza* del cilindro è la distanza dei piani paralleli delle due basi: essa è uguale all'asse, o al lato del cilindro medesimo.

212. Da questa genesi del cilindro ne consegue che ogni sezione fatta da un piano che passa per l'asse, è un rettangolo come *CDFF* doppio del rettangolo generatore *ABCD*, e che ogni sezione *PRQ* fatta da un piano perpendicolare all'asse *AB*, è un cerchio uguale a ciascuna base. Infatti, nel rivolgimento del rettangolo *ABCD* intorno ad *AB*, la retta *OQ* perpendicolare ad *AB* descrive un cerchio uguale alla base.

213. Due cilindri retti si dicono *simili* allorchè sono prodotti dalle rotazioni di due rettangoli simili *ABCD*, *abcd* intorno a lati omologhi *AB*, *ab*; cioè quando i loro assi sono proporzionali ai raggi delle loro basi.

214. Il *cono retto* (fig. 46) è il solido, che vien generato dal rivolgimento di un triangolo rettangolo *SAO* intorno ad un cateto immobile *SO*. L'altro cateto *AO* genera il cerchio *ANB*, che dicesi *base* del cono. Il punto *S* si chiama *vertice* del cono; il cateto *SO* che unisce il vertice col centro della base è l'*asse* del cono; e finalmente si dà il nome di *lato*, o *apotema* alla linea *SA* che descrive a *superficie curva* del cono medesimo.

215. Apparisce da siffatta genesi del cono che ogni sezione fatta da un piano, il quale passa per l'asse, è un triangolo isoscele come *ASB* doppio del triangolo generatore *SOB*; e che ogni sezione *EMD* perpendicolare all'asse è un cerchio.

216. Due coni retti sono detti *simili*, allorchè sono prodotti dalle rotazioni di due triangoli rettangoli simili *ASO*, *aso* intorno a cateti omologhi, cioè quando i loro assi sono proporzionali ai raggi delle loro basi.

217. Il *cono troncato*, o *tronco di cono* (fig. 47) è la porzione di cono compresa fra la base ed un piano ad essa parallelo. Quindi il tronco di cono può considerarsi come prodotto dalla rotazione di un trapezio *AODH*, di cui gli angoli *O*, e *D* sono retti, intorno al lato immobile *OD*. Questo lato dicesi *asse* o *altezza* del tronco; e si chiamano poi *basi* i cerchi descritti dale rette *OA*, *DH*; e finalmente alla linea *AH* si dà il nome di *lato del tronco di cono*.

218. I tronchi di due coni retti si dicono *simili* quando sono prodotti da trapezj simili; cioè quando i loro assi sono proporzionali ai raggi delle basi corrispondenti.

219. La *sfera* (fig. 48) è il solido generato dal rivolgimento di un semicerchio *ADB* intorno ad un suo diametro *AB*. Quindi la *superficie sferica* che vien prodotta dalla rotazione della semicirconferenza *ADB*, ha tutti i suoi punti equidistanti dal centro *O* del semicerchio generatore, che dicesi *centro della sfera*. La distanza del centro della sfera a un punto qualunque della sua superficie si chiama *raggio della sfera*. È manifesto che tutti i raggi di una sfera sono uguali fra loro, e che tutti i diametri sono uguali e doppj dei raggi.

220. Dalla genesi della sfera risulta ancora che ogni sezione fatta da un piano, il quale passa pel centro, è un cerchio, di cui il raggio è il raggio della sfera. Infatti tutti i punti come *A*, *L*, *B* comuni al piano accennato ed alla superficie sferica si trovano ad una eguale distanza dal punto *O*; per conseguenza la sezione medesima *ALB* è un cerchio che ha per diametro il diametro della sfera. In generale ogni sezione *MKN* fatta con un piano qualunque è un cerchio; poichè se dal centro *O* si abbassi sul piano *MKN* la perpendicolare *OE*, le oblique *OM*, *OK*, *ON*, ecc, essendo uguali come raggi della sfera saranno equidistanti dal piede *E* della perpendicolare; e però le rette *EM*, *EK*, *EN*, ecc. saranno uguali fra loro, e la sezione *MKN* sarà un cerchio.

221. Ogni circolo della sfera che passa pel centro di essa dicesi *circolo massimo*; chiamasi *circolo minore* quello che non passa pel centro della sfera. È evidente che i circoli massimi sono uguali fra loro, poichè hanno il medesimo centro ed il medesimo raggio della sfera.

222. Due circoli massimi si tagliano sempre in due parti uguali, perchè la loro comune intersezione, passando pel centro, è un diametro. Quindi le loro circonferenze s'intersegano alla distanza di 180 gradi,

223. Ogni circolo massimo divide la sfera e la sua superficie in

due parti uguali; dappoichè un circolo masssimo rivolgendosi intorno al proprio diametro deve produrre la sfera medesima. La metà di una sfera dicesi *emisfero*.

224. Il centro di un circolo minore, e quello della sfera sono in una medesima retta perpendicolare al piano del circolo minore

225. I circoli minori sono tanto più piccoli quanto più si allontanano dal centro della sfera; perchè più grande è quella distanza, e più piccola diviene la corda, come *MN*, che è il diametro del circolo minore *MKN*,

226. Per due punti dati sopra la superficie della sfera può sempre passare un arco di circolo massimo; poichè i due punti dati ed il centro della sfera sono tre punti che determinano la posizione di un piano,

Nondimeno se i due punti accennati fossero alle estremità d'un diametro, allora questi due punti ed il centro sarebbero in linea retta, e vi sarebbero infiniti circoli massimi che potrebbero passare per i due punti dati.

227. Un piano indefinito che ha un solo punto comune colla superficie di una sfera dicesi *piano tangente* della sfera medesima. Esso può considerarsi come prodotto dal rivolgimento della tangente *AR* al cerchio generatore *ADB* intorno al diametro *AB*. Quindi un piano perpendicolare alla estremità di un diametro della sfera é tangente a questa sfera; e reciprocamente ogni piano tangente alla sfera è perpendicolare all'estremità del diametro che passa pel punto di contatto.

228. Si dice *zona* la parte della superficie della sfera compresa fra due piani paralleli. I circoli che rappresentano le sezioni dei piani medesimi colla sfera si chiamano *basi* della zona. Se uno di questi piani è tangente alla sfera, allora la zona ha una base, e con altro nome dicesi *callotta*.

229. Una zona a due basi *MDLKCN* può considerarsi come generata dal rivolgimento di un arco *DM* intorno al diametro *AB* che passa per i centri delle due basi. Una zona ad una base *AMKN* si può considerare come prodotta dal rivolgimento di un arco *AM* intorno al diametro *AB* che passa per una delle sue estremità.

230. L'*altezza* di una zona è la distanza dei due piani paralleli, che sono le basi della zona.

231. Si chiama *segmento sferico* la porzione della sfera compresa fra due piani paralleli. Le sezioni di questi piani colla sfera sono le *basi* del segmento medesimo. Se uno dei piani paralelli fosse tangente alla sfera, allora il segmento sferico avrebbe una sola base.

232. L' *altezza* d' un segmento sferico è la distanza dei due piani paralleli che formano le basi del segmento.

233. Dicesi *settore sferico* la porzione della sfera compresa fra una callotta, ed una superficie conica, che ha per base il circolo base della callotta, e per vertice il centro della sfera.

Un settore sferico può considerarsi come prodotto dalla rotazione di un settore circolare *KAO* intorno ad uno dei raggi *OA*, *OK*.

Finalmente si chiama *fuso* la parte della superficie della sfera racchiusa fra due semi-circoli massimi che terminano a un diametro comune, e si dà il nome di *cuneo* o *unghia sferica* alla parte della sfera compresa fra il fuso e le sue due facce.

CAPITOLO II.

DELLA MISURA DELLE SUPERFICIE DE' TRE CORPI ROTONDI, E DEI RAPPORTI CHE NE DERIVANO.

234 La teorica de'tre corpi rotondi riducesi nella geometria elementare quasi tutta alla misura delle loro superficie, de' loro volumi, ed ai rapporti che ne derivano. Quindi è necessario che si conosca il principio su cui stabiliremo una siffatta misura, dappoichè i geometri nell'assegnarla hanno seguito diversi metodi, secondochè hanno giudicato essere l'uno più esatto, o più facile dell'altro. Or il principio che seguiremo consiste nel considerare il cerchio come un poligono regolare di un numero infinito di lati; e per conseguenza il cilindro retto come un prisma retto di un numero infinito di facce, il cono retto come una piramide regolare di un numero infinito di facce, e la sfera come un poliedro di un numero infinito di facce. Questa maniera di considerare il cerchio, ed i tre corpi rotondi ha il prezioso vantaggio di abbreviare le dimostrazioni, che andiamo ad esporre de'così detti *Teoremi di Archimede* intorno al cilindro, al cono, ed alla sfera; e di farle concepire e ritenere facilmente, perchè s'immedesimano, per così dire, col metodo con cui i teoremi accennati vennero scoperti da quel sommo geometra dell'antichità, il quale li dimostrò poi in altra guisa per adattarsi alla maniera di pensare de'geometri del suo tempo, i quali non si permettevano mai di adoperare la considerazione dell'infinito nelle loro dimostrazioni. E si noti ancora che quando quella maniera di considerare il cerchio, ed i tre corpi rotondi venga adoperata come si conviene, e non s'appoggi a ragionamenti vaghi ed arbitrarii, essa può riescire tanto esatta quanto qualsivoglia altro metodo, che si volesse mettere in suo luogo.

PROPOSIZIONE XCI — *TEOREMA.*

235. *La superficie curva del cilindro retto ha per misura il prodotto della circonferenza della base per l'altezza* (fig. 45).

Dim. Sia il cilindro retto *EHDF*. Nella geometria piana si è dimostrato che il cerchio si può considerare come un poligono regolare di un numero infinito di lati; per conseguenza la base *EHD* del cilindro si potrà considerare come un poligono regolare di un numero infinito di lati. Quindi il cilindro medesimo potrà esser considerato come un prisma retto di un numero infinito di facce. Ma la superficie convessa del prisma retto ha per misura il pro-

dotto del perimetro della base per l' altezza (n° 204), dunque la superficie curva del cilindro retto dovrà aver per misura il prodotto della circonferenza della base per l'altezza; che è quanto si doveva dimostrare.

236. *Corollario*. Da ciò si deduce che la superficie curva di un cilindro retto è uguale a quella di un rettangolo avente per base la circonferenza della base del cilindro, e per altezza quella del cilindro medesimo. Laonde tutto quello che nella geometria piana è stato dimostrato intorno ai rapporti di due rettangoli si può applicare alle superficie curve di due cilindri retti.

237. *Scolio*. È manifesto che per avere la misura della superficie totale del cilindro retto, bisogna aggiungere alla misura della superficie curva quella delle due basi del cilindro medesimo.

PROPOSIZIONE XCII — *TEOREMA*.

238. *Le superficie curve di due cilindri simili stanno fra loro come i quadrati delle altezze, o come i quadrati dei raggi delle basi corrispondenti* (fig. 45).

Dim. Infatti, essendo nei cilindri simili (n° 213) gli assi o le altezze *AB*, *ab* proporzionali ai raggi delle basi *AE*, *ae*; ed essendo i raggi proporzionali alle circonferenze *DEH*, *deh*, ne risulta che queste saranno proporzionali alle altezze; e per conseguenza saranno simili i rettangoli che rappresentano le superficie curve de' due cilindri simili. Ma i rettangoli simili stanno come i quadrati dei lati omologhi, dunque le superficie curve de' due cilindri stanno come i quadrati delle altezze, ovvero come i quadrati de' raggi delle basi.

239. *Scolio*. Essendo i cerchi come i quadrati de' raggi, è evidente che le superficie totali di due cilindri simili stanno come i quadrati delle altezze, o de' raggi delle basi de cilindri medesimi.

PROPOSIZIONE XCIII — *TEOREMA*.

240. *La superficie curva del cono retto ha per misura il prodotto della circonferenza della base per la metà del lato* (fig. 46).

Dim. Sia il cono retto *S.ANB*. Si è dimostrato nella geometria piana che il cerchio *ANB* si può considerare come un poligono regolare di un numero infinito di lati; per conseguenza il cono medesimo potrà considerarsi come una piramide regolare di un numero infinito di facce. Ma la superficie convessa della piramide regolare ha per misura il prodotto del perimetro della base per la metà dell'apotema (n° 207), dunque la superficie curva del cono retto dovrà avere per misura la circonferenza della base per la metà del lato, il che si era proposto di dimostrare.

241. *Corollario* I. Da ciò si deduce che la superficie curva di un

cono retto è equivalente all'aja di un triangolo rettangolo, di cui un cateto rappresenta la circonferenza della base del cono, e l'altro il lato del cono medesimo. Quindi si potrà applicare alle superficie curve de'coni retti quanto si è dimostrato nella geometria piana intorno ai rapporti delle aje de'triangoli.

242. *Corollario* II. Pel punto di mezzo E del lato SA si conduca un piano parallelo alla base del cono.

Le circonferenze ANB, EMD stanno come i raggi AO, EK: ma AO è doppio di EK, perchè SA è doppio di SE, dunque la circonferenza della base del cono è doppia di quella della sezione; e però

La superficie curva del cono retto ha ancora per misura il prodotto del suo lato per la circonferenza della sezione equidistante dal vertice e dalla base.

243. *Scolio.* È manifesto che la superficie totale del cono retto si ottiene aggiungendo alla superficie curva quella della base del cono medesimo.

PROPOSIZIONE XCIV — *TEOREMA.*

244. *Le superficie curve di due coni retti simili stanno come i quadrati delle altezze, o come i quadrati de'raggi delle basi corrispondenti* (fig. 46).

Dim. Perocchè, essendo le altezze SO, so proporzionali ai raggi AO, ao, (n° 216), saranno simili i triangoli rettangoli SAO, sao; e perciò i lati SA, sa saranno proporzionali ai raggi AO, ao, ovvero alle circonferenze ANB, anb. Quindi risulteranno simili i triangoli rettangoli che rappresentano le superficie curve de' due coni. Ma i triangoli simili stanno come i quadrati dei lati omologhi, dunque le superficie accennate stanno come i quadrati dei lati SA, sa, e per conseguenza come i quadrati delle altezze SO, so, ovvero dei raggi AO, ao.

PROPOSIZIONE XCV — *TEOREMA.*

245. *La superficie curva del tronco di cono retto ha per misura il prodotto del lato per la semi-somma delle circonferenze delle basi* (fig. 47).

Dim. Sia ANG un tronco di cono retto. Considerando le basi come poligoni regolari di un numero infinito di lati, il tronco proposto si potrà considerare come un tronco di piramide regolare a basi parallele di un numero infinito di facce. Ma la superficie convessa di questo tronco ha per misura il prodotto della semi-somma de' perimetri delle basi per la porzione dell' apotema, che è compresa fra queste medesime basi (n°208), dunque la superficie curva del tronco di cono retto dovrà avere per misura il prodotto del suo

lato *HA* per la semi-somma delle circonferenze delle basi *ANB*, *HMG*, come erasi proposto di dimostrare.

246. *Scolio*. Nel trapezio *AHGB* la linea *EF*, che unisce i punti di mezzo de' lati non paralleli, è uguale alla semi-somma delle basi *AB*, *HG* del trapezio medesimo, come è stato dimostrato nella geometria piana. Ma le circonferenze de' cerchi stanno come i diametri, dunque la circonferenza *ERF* è uguale alla semi-somma delle circonferenze *ANB*, *HMG*; e per conseguenza

La superficie curva del tronco di cono retto ha ancora per misura il prodotto del suo lato per la circonferenza del cerchio equidistante dalle due basi.

247. *Definizione*. Si dice *porzione di poligono regolare* la figura terminata da una serie di corde uguali, che sono iscritte in un arco di cerchio, da una estremità all'altra del medesimo arco.

248. *Scolio*. La figura accennata ha ricevuto un tal nome, perchè ha le proprietà principali de' poligoni regolari. Infatti, essa ha i lati eguali, e gli angoli eguali come iscritti in eguali segmenti di cerchio; e di più può esser iscritta e circoscritta al cerchio, come apparisce da ciò che si è dimostrato nella geometria piana intorno ai poligoni iscritti e circoscritti al cerchio.

Purtuttavolta una porzione di poligono regolare non fa parte di un poligono regolare propriamente detto, se non quando l'arco sotteso da uno de' suoi lati è una parte aliquota della circonferenza.

È poi manifesto che per iscrivere in un arco dato una porzione di poligono regolare, basta dividere siffatto arco in 2, 4, 8, 16, ec. parti eguali, ed unire con delle corde i punti di divisione.

PROPOSIZIONE XCVI — *TEOREMA*.

249. *Siano* AB, BC, CD, ecc. *più lati successivi di un poligono regolare*, O *il suo centro*, *ed* OI *il raggio del cerchio iscritto. Se si supponga che la porzione di poligono* ABCD *situata da una medesima parte dell'asse* FG *giri intorno a questo*, *la superficie del solido prodotto dalla rotazione del poligono avrà per misura la porzione dell'asse MQ moltiplicata per la circonferenza del cerchio iscritto* (fig. 50).

Dim. Dai punti *A*, *B*, *C*, *D* si abbassino sull'asse le perpendicolari *AM*, *BN*, *CP*, *DQ*; e dal centro *O* si conducano sopra i lati *AB*, *BC* le perpendicolari *OI*, *OL*, che saranno raggi del cerchio iscritto: finalmente si tirino le rette *AR*, ed *IH* la prima parallela, e la seconda perpendicolare a *MQ*.

Ciò premesso, il trapezio *ABMN* girando intorno all' asse produce un tronco di cono retto, la cui superficie curva ha per misura il prodotto del lato *AB* per la circonferenza che ha per raggio *IH* (n°246). Or Essendo simili i triangoli *ABR*, *IOH*, perchè hanno i lati rispettivamente perpendicolari, si ha la proporzione

$$AB : IO :: AR : IH$$

Ma *IO* è il raggio del cerchio iscritto, ed *IH* è il raggio del cerchio equidistante dalle due basi del tronco di cono retto; e di più le circonferenze stanno come i raggi, dunque sarà *AB* a circonferenza *IO* come *AR* a circonferenza *IH*, e per conseguenza il prodotto del lato *AB* per la circonferenza *IH* sarà uguale al prodotto di *AR*, ovvero di *MN*, per circonferenza *IO*. Sicchè la superficie curva del tronco di cono descritta dal lato *AB* avrà per misura la circonferenza del cerchio iscritto per la porzione *MN* dell'asse.

Similmente si dimostra che la superficie curva del tronco di cono, o del cilindro generato dalla rotazione della figura *BCPN* intorno all'asse ha per misura il prodotto di *NP* per la circonferenza *OL*, ovvero *OI*, e lo stesso si potrà dire della superficie curva del tronco di cono, che vien prodotto dalla rotazione del trapezio *CDQP*. Quindi la somma di queste superficie avrà per misura il prodotto della porzione *MQ* dell'asse per la circonferenza del cerchio iscritto, il che erasi proposto di dimostrare.

250. *Corollario*. Se il poligono intero è di un numero pari di lati, l'asse *FG* passerà per due vertici opposti *F*, *G* di esso poligono, e la superficie descritta dal poligono *FACG* avrà per misura il prodotto dell'asse *FG* per la circonferenza del cerchio iscritto. Infatti, si potrà dimostrare come sopra che la superficie curva del cono descritto dal triangolo *FAM* nel suo rivolgimento intorno all' asse, avrà per misura il prodotto di *FM* per la circonferenza *KO* del cerchio iscritto, e lo stesso si potrà dire della superficie curva del cono descritto dal triangolo *DQG*.

PROPOSIZIONE XCVII — *TEOREMA*.

251. *La superficie della sfera ha per misura il prodotto della circonferenza di un circolo massimo pel diametro* (fig. 50).

Dim. Sia *FBDG* il semi-perimetro di un poligono regolare di un numero pari di lati, ed *OK* il raggio del cerchio iscritto a questo poligono. Nella proposizione precedente si è dimostrato che rotando la figura *FBDG* intorno all'asse *FG*, la superficie del solido, che ne risulta, ha per misura il prodotto dell'asse per la circonferenza del cerchio iscritto. Ma nella geometria piana si è dimostrato che quando la figura *FBDG* è di un numero infinito di lati, essa si confonde col cerchio iscritto, dunque in tal caso il solido accennato si confonderà con la sfera, e l'asse *FG* col diametro *ES* della sfera medesima; e per conseguenza la superficie della sfera dovrà avere per misura il prodotto del diametro *ES* per la circonferenza di un circolo massimo; il che erasi proposto di dimostrare.

252. *Corollario* I. Un circolo massimo della sfera avendo per misura il prodotto della sua circonferenza per la metà del raggio; ed essendo il diametro quadruplo della metà del raggio, ne consegue che

La superficie della sfera è quadrupla di un suo circolo massimo.

253. *Corollario* II. Dal corollario precedente si deduce che le superficie di due sfere qualunque stanno come i circoli massimi. E poichè i circoli stanno come i quadrati de' raggi, o de' diametri, si conchiude che

Le superficie delle sfere stanno fra loro come i quadrati de' raggi, o de' diametri.

PROPOSIZIONE XCVIII — *TEOREMA.*

254. *La zona sferica ha per misura il prodotto della circonferenza di un circolo massimo per l'altezza di essa zona* (fig. 51).

Dim. Si consideri in primo luogo la zona ad una base, che vien prodotta dal rivolgimento dell'arco *AC* intorno al diametro *AD*.

Nell'arco *AC* s'iscriva una porzione di poligono regolare *AMNPC*. La superficie del solido generato dalla rotazione della figura *AMNPC* intorno al diamentro *AD* ha per misura il prodotto di *AF*, altezza della zona, per la circonferenza del cerchio iscritto alla porzione di poligono regolare, il cui raggio è *OI*, ossia la perpendicolare abbassata dal centro *O* sulla corda *AM* (n° 249). Ma quando la figura *AMNPC* ha un numero infinito di lati, il suo perimetro si confonde coll'arco *AC*, la superficie del solido da essa descritto si confonde colla zona, ed il circolo iscritto col circolo massimo della sfera; dunque la zona descritta dall'arco *AC* deve avere per misura il prodotto della sua altezza *AF* per la circonferenza del circolo massimo *ACD*.

Passiamo in secondo luogo a considerare una zona qualunque a due basi, che vien descritta dal rivolgimento dell'arco *BC* (fig.52) intorno al diametro *AD*, su cui si abbassino le perpendicolari *BE*, *CF* dalle due estremità dell'arco medesimo.

La zona descritta dall'arco *BC* è la differenza delle due zone descritte dagli archi *AC*, *AB*. La prima di queste zone ha per misura il prodotto dell'altezza *AF* per la circonferenza del circolo massimo *ACD*; la seconda ha per misura il prodotto dell'altezza *AE* per la stessa circonferenza; per conseguenza la zona descritta dall'arco *BC* dovrà avere per misura la sua altezza *EF* per la circonferenza del circolo *ACD*. Epperò ogni zona sferica ha per misura il prodotto della sua altezza per la circonferenza di un circolo massimo; il che si doveva dimostrare.

255. *Corollario*. Apparisce da questo teorema che

Due zone prese in una medesima sfera, o in sfere uguali, stanno fra loro come le loro altezze, ed una zona qualunque sta alla superficie della sfera come l'altezza di quella zona sta al diametro.

PROPOSIZIONE XCIX — *TEOREMA.*

256. *La zona sferica ad una base è equivalente al circolo, che ha per raggio la corda dell' arco generatore della zona medesima* (fig. 52).

Dim. Sia *AB* la corda dell'arco generatore della zona. La perpendicolare *BE* abbassata dal punto *B* sul diametro *AD* sarà il raggio del cerchio, che è la base della zona, ed *AE* sarà l'altezza della zona medesima.

Or essendo la corda *AB* media proporzionale fra il diametro *AD*, ed il segmento adiacente *AE*, dalla proprietà della proporzione continua si deduce che il diametro *AD* sta ad *AE* come il quadrato di *AD* al quadrato di *AB*. Quindi (n° 255) la superficie della sfera sta alla zona sferica ad una base come il quadrato di *AD* al quadrato di *AB*, ovvero come un circolo massimo al circolo che ha per diametro *AB*. Ma la superficie sferica è quadrupla di un suo circolo massimo, dunque ancora la zona sferica ad una base dovrà essere quadrupla del circolo che ha per diametro la corda *AB* dell'arco generatore; e però equivalente al circolo che ha per raggio la corda medesima.

CAPITOLO III.

DELLA MISURA DELLE SOLIDITA', O VOLUMI DEI TRE CORPI ROTONDI, E DEI RAPPORTI CHE NE DERIVANO.

257. Stabilita la misura delle superficie dei tre corpi rotondi si conosce subito la via da tenersi per arrivare alla misura dei loro volumi; nondimeno la misura del volume della sfera offre qualche difficoltà, allorchè si vuole determinarlo partendo dal principio fondamentale, cioè quello di considerare la sfera come un poliedro di un numero infinito di facce, senza deviare in certe forme di ragionamento vaghe ed inesatte, cui si dà impropriamente il nome di metodo degl'infinitamente piccoli.

PROPOSIZIONE C — *TEOREMA.*

258. *Il cilindro retto ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

Dim. Infatti, considerando il cilindro retto come un prisma retto di un numero infinito di facce, la proposizione enunciata diviene evidente; dappoichè il prisma ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.

259. *Corollario* I. Ciò che altrove si è detto intorno ai rapporti di due prismi si applica ancora ai rapporti di due cilindri.

260. *Corollario* II. *I cilindri simili stanno come i cubi degli assi o dei diametri delle basi.*

Infatti, la ragione di due cilindri in generale è composta della ragione delle basi, e di quella delle altezze, ovvero della ragione dei quadrati de' diametri delle basi e della ragione delle altezze; ma quando i cilindri sono simili la ragione delle altezze è uguale a quella dei diametri, dunque i cilindri simili sono in ragion triplicata delle loro altezze o dei diametri delle loro basi, ossia sono come i

cubi delle altezze, o de'diametri medesimi, o anche dei raggi delle basi.

PROPOSIZIONE CI — *TEOREMA*

261. *Il cono retto ha per misura il prodotto della base pel terzo dell'altezza.*

Dim. Infatti, il cono retto si può considerare come una piramide regolare di un numero infinito di facce; ma questa ha per misura il prodotto della base pel terzo dell'altezza, dunque il cono retto avrà ancora per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza.

262. *Corollario* I. Ciò che altrove si è dimostrato intorno ai rapporti delle piramidi fra loro, e delle piramidi paragonate ai prismi, si può applicare ai rapporti dei coni fra loro, e dei coni paragonati ai cilindri, fra i quali merita di essere ricordato il teorema dimostrato da Eudosso, cioè che il cono retto è la terza parte del cilindro retto della stessa base e della stessa altezza.

263. *Corollario* II. I coni simili stanno come i cubi delle loro altezze, o come i cubi dei diametri delle loro basi. La dimostrazione è come quella fatta per i cilindri simili.

PROPOSIZIONE CII — *TEOREMA.*

264. *Il tronco di cono retto a basi parallele è uguale alla somma di tre coni, che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e per basi l'uno la base inferiore, l'altro la base superiore, ed il terzo una media proporzionale fra le due basi.*

Dim. Infatti, Il tronco di cono retto a basi parallele si può considerare come un tronco di piramide regolare a basi parallele di un numero infinito di facce; ma il tronco di piramide equivale a tre piramidi che hanno le condizioni enunciate nella proposizione, dunque il tronco di cono equivale pure a tre coni che hanno le stesse condizioni.

265. *Corollario.* Da ciò ne segue che il tronco di cono retto si misura come il tronco di piramide.

PROPOSIZIONE CIII — *TEOREMA.*

266. *La sfera ha per misura il prodotto della sua superficie pel terzo del suo raggio* (fig. 53).

Dim. Sia A il centro della sfera; e per questo punto si faccia passare un piano ABK che tagli la sfera; indi nel circolo massimo risultante dalla sezione s'iscriva un poligono regolare, di cui un lato sia BK; si tirino i raggi BA, KA, ed al punto A s'innalzi sul piano ABK la perpendicolare AC che si prolunghi finchè incontri la su-

perficie sferica in un punto C. Ciò premesso, per i tre punti C, B, A si faccia passare un piano come pure per i tre punti C, K, A, ne risulteranno gli archi di cerchio massimo CB, CK, ciascuno de' quali sarà un quadrante. S'iscrivano in questi due quadranti due porzioni (n° 247) di poligoni regolari perfettamente uguali: si conducano le rette OS, FR; dai punti O, S si abbassino sopra AB, ed AK le perpendicolari OV, SQ, e si unisca VQ.

Essendo i quadranti CAB, CAK eguali fra loro, ed identiche le costruzioni in essi eseguite, è chiaro che sarà $OV=SQ$, e $VB=QK$. Ma OV, SQ sono anche parallele, perchè ambedue parallele ad AC, dunque $OVSQ$ è un parallelogrammo. Da un'altra parte, poichè $VB=QK$, e quindi $AV=AQ$, anche BK sarà parallela a VQ; e però le rette BK, OS parallele alla terza VQ risulteranno parallele, ed il quadrilatero $OSBK$ sarà una figura piana. Lo stesso si dimostrerà facilmente per qualunque altro quadrilatero iscritto $FOSR$, poichè in quanto al triangolo CFR, esso è sempre in un piano. Se dunque si congiungano i punti O, S, F, R col centro A della sfera, si sarà iscritto nel solido $BACK$ un poliedro composto di piramidi che hanno per basi i quadrilateri $OBKS$, $OFRS$...., ed il triangolo CFR, e per vertice comune il punto A. Facendo lo stesso per tutte le mezze ugne sferiche, si troverà iscritto nella sfera un poliedro, il quale potrà avere un numero di facce illimitato. Infatti, a misura che si raddoppia il numero de' lati de' poligoni, dei quali più sopra si è parlato, si viene ancora a raddoppiare il numero delle facce del poliedro; e poichè un siffatto raddoppiamento non ha alcun limite, così diviene manifesto che il numero delle facce del poliedro iscritto alla sfera può farsi tanto grande che si vuole. Quindi, allorchè i poligoni accennati avranno un numero infinito di lati, ossia si confonderanno con i circoli massimi, il poliedro iscritto avrà un numero infinito di facce, e si confonderà colla sfera, la quale in conseguenza si può considerare come un poliedro di un numero infinito di facce, ciascuna delle quali potrà considerarsi come base di una piramide che ha il vertice al centro della sfera. Quindi la sfera è la riunione di una infinità di piramidi, delle quali le basi compongono la superficie sferica, e l'altezza di ciascuna è uguale al raggio. Ma ogni piramide ha per misura il prodotto della sua base pel terzo della sua altezza, dunque la sfera avrà per misura il prodotto della sua superficie pel terzo del suo raggio.

267. *Corollario* I. Dal teorema precedente si deduce che la sfera è equivalente ad un cono, di cui la base è il quadruplo di un cerchio massimo, e l'altezza è uguale al raggio della sfera.

268. *Corollario* II. *Le sfere stanno fra loro come i cubi dei raggi, o dei diametri.*

Infatti le sfere stanno in ragion composta dalla ragione delle loro superficie, e dalla ragione dei raggi. Ma la prima ragione è duplicata di quella dei raggi, dunque le sfere stanno in ragion triplicata degli stessi raggi, ovvero come i cubi dei raggi, o dei diametri.

PROPOSIZIONE CIV — *TEOREMA*.

269. *Il settore sferico ha per misura il prodotto della zona che gli serve di base pel terzo del raggio* (fig. 54).

Dim. Sia il settore sferico *CDEK* generato dalla rotazione del settore circolare *CKE* intorno al raggio *CE*.

Nel cerchio *DBK*, base della callotta generata dall'arco *CK*, s'iscriva un poligono regolare, di cui un lato sia *BK*: Si tirino i raggi *AB*, *AK*, e si ripeta la costruzione fatta nella proposizione precedente. Si dimostrerà come nella proposizione accennata che il settore sferico, generato dal rivolgimento del settore circolare *CKE* intorno al raggio *CE* può considerarsi composto di una infinità di piramidi, delle quali le basi formano la callotta descritta dall'arco *CK*, e l'altezza comune è uguale al raggio. Quindi il settore sferico avrà per misura il prodotto della callotta pel terzo del raggio ; il che si doveva dimostrare.

270. *Corollario* I. Essendosi dimostrato (n° 256) che la callotta descritta dall'arco *AB*, (fig. 55) è equivalente al circolo che ha per raggio la corda *AB*, il settore sferico descritto dal settore circolare *ABO* sarà equivalente al cono che ha per altezza il raggio *AO* della sfera, e per base un cerchio, di cui il raggio è uguale alla corda *AB* dell' arco generatore della callotta che serve di base al settore.

Se il settore sferico fosse descritto dal settore circolare *BCO* maggiore del quadrante, esso sarebbe equivalente al cono che ha per altezza il raggio *OC* della sfera, e per base il cerchio, di cui il raggio è uguale alla corda *BC* dell'arco generatore della calotta che serve di base al settore.

271. *Corollario* II. Essendo il quadrato di *AB* uguale ai quadrati di *AE*, *EB*, il cerchio che ha per raggio *AB* sarà uguale ai cerchi, che hanno per raggi *AE*, *EB*, per conseguenza il cono che ha per base il cerchio di raggio *AB*, e per altezza *AO*, ovvero il settore sferico prodotto dal rivolgimento del settore circolare *ABO*, sarà uguale alla somma di due coni, che hanno la medesima altezza *AO*, e per basi i cerchi dei raggi *AE*, *EB*.

PROPOSIZIONE CV — *TEOREMA*.

272. *Il segmento sferico ad una base è equivalente al cono, che ha per base il cerchio, di cui il raggio è l altezza del segmento, e per asse la rimanente parte del diametro accresciuta del raggio* (fig. 55).

Dim. Si consideri il segmento sferico generato dal rivolgimento del mezzo segmento circolare *ABE* intorno ad *AE*. Essendo il settore sferico generato dal settore circolare *ABO* uguale alla somma

di due coni, che hanno per basi i cerchi de' raggi *AE*, *EB*, e per altezza *AO* (n° 271), se si tolga di comune il cono prodotto dal rivolgimento del triangolo *BEO* intorno ad *EO*. il segmento sferico proposto sarà uguale alla somma di due coni, de' quali il primo ha per base il cerchio di raggio *AE*; e per altezza *AO*. ed il secondo ha per base il cerchio di raggio *BE*, e per altezza *AE*; poichè il cono che ha per base il cerchio di raggio *BE*, e per altezza *AO* è uguale alla somma dei due coni che hanno per base il cerchio accennato, e per altezze le rette *AE*, *EO*. Or essendo *BE* media proporzionale fra i due segmenti *AE*, *EC* del diametro, il quadrato di *AE* starà al quadrato di *BE* come *AE* ad *EC*. Quindi il cerchio di raggio *AE* starà al cerchio di raggio *BE* come *AE* ad *EC*, e facendo in questa proporzione il prodotto degli estremi e quello dei medii, ne risulterà che il cono il quale ha per base il primo di quelli cerchi, e per altezza *EC* sarà equivalente al cono che ha per base il secondo cerchio, e per altezza *AE*. Dalle cose fin qui esposte si deduce che il segmento sferico proposto è uguale alla somma di due coni, dei quali ciascuno ha per base il cerchio di raggio *AE*, ma il primo ha per altezza *AO*, ed il secondo *EC*; e per conseguenza il segmento medesimo sarà equivalente al cono che ha per base il cerchio, di cui il raggio è l'altezza *AE* del segmento, e per asse la rimanente parte *EC* del diametro accresciuta del raggio *AO*.

273. *Scolio* I. Se il segmento sferico ad una base fosse maggiore dell'emisfero, come sarebbe quello prodotto dal rivolgimento del mezzo segmento circolare *EBC* intorno ad *EC*, avrebbe luogo la stessa dimostrazione fatta qui sopra, solamente in vece di sottrarre il cono generato dal triangolo *BEO*, si deve aggiungere al settore sferico generato dal settore circolare *CBO*.

274. *Scolio* II. Se il segmento sferico avesse due basi, come quello descritto dalla porzione di cerchio *BCFE* (fig. 52) si otterrà il suo volume osservando che esso è sempre la differenza di due segmenti sferici, dei quali ciascuno ha una sola base, come sarebbero i segmenti sferici descritti dai mezzi segmenti circolari *ACF*, *ABE*.

275. *Scolio* III. Merita ancora di essere osservato che

Il volume di un segmento sferico ad una base ha per misura il prodotto del cerchio, che avrebbe per raggio l'altezza di questo segmento, pel raggio della sfera diminuito del terzo di quella altezza.

Questa espressione del volume del segmento sferico equivale a quella data nel teorema precedente. Infatti, la porzione *EC* del diametro *AC* (fig. 55) coll'aggiunta del raggio *AO* equivale a tre volte il raggio *AO* meno l'altezza *AE* del segmento; per conseguenza il cono che ha per base il cerchio di raggio *AE*, e per asse la rimanente porzione *EC* del diametro con l'aggiunta del raggio *AO*, avrà per misura il cerchio di raggio *AE* moltiplicato pel raggio *AO* diminuito del terzo di *AE*.

CAPITOLO IV.

DELLE RAGIONI, CHE HA LA SFERA COL CILINDRO, E COL CONO AD ESSA CIRCOSCRITTI.

PROPOSIZIONE CVI — *TEOREMA*

276. *Il cilindro retto sta alla sfera cui è circoscritto come 6: 4, tanto rispetto alla superficie totale, quanto alla solidità* (fig. 56).

Dim. Sia *DFPE* un quadrato circoscritto al circolo *AGBH*; i diametri *AB*, *GH* saranno l'uno perpendicolare all'altro; e dal simultaneo rivolgimento del semicircolo *AGB*, e del semiquadrato *ADEB* intorno ad *AB* si produrrà una sfera, ed un cilindro retto ad essa circoscritto, il quale ha le basi uguali a due circoli massimi della sfera medesima; poichè il diametro *EP*, o *DF* di ciascuna di queste basi è uguale al diametro *GH* della sfera. Da ciò si deduce che la superficie curva del cilindro circoscritto alla sfera è uguale alla superficie di questa sfera, essendo l'una e l'altra espressa dal prodotto della circonferenza di un circolo massimo per l'asse *AB*. Ma la superficie della sfera equivale a quattro circoli massimi (n° 252), dunque se alla superficie curva del cilindro si uniscono le due basi, la superficie totale del cilindro sarà uguale a sei circoli massimi; e però la superficie del cilindro circoscritto starà a quella della sfera come 6: 4.

Venendo ora alle solidità, si osservi che il cilindro ha per misura il prodotto della base, che è un cerchio massimo, pel diametro *AB*, ovvero per 6/3 del raggio *CB*; e che la sfera ha per misura la sua superficie moltiplicata per 1/3 dello stesso raggio; il che equivale al prodotto di un cerchio massimo per 4/3 del raggio, essendo la superficie sferica uguale a quattro circoli massimi. Laonde il cilindro starà alla sfera come 6/3 a 4/3 ossia come 6: 4.

277. *Scolio* I. Dal teorema precedente apparisce che nei due solidi, cioè il cilindro retto circoscritto alla sfera e la sfera, i volumi stanno fra loro come le superficie totali. Archimede apprezzò a tal segno questa sua scoperta da volere che in vece del proprio nome si scolpisse sulla sua tomba un cilindro circoscritto alla sfera.

278. *Scolio.* II. Merita ancora di essere osservato che se il cilindro e la sfera si segano con piani perpendicolari all'asse *AB*, i singoli segmenti della superficie curva del cilindro saranno equivalenti ai singoli segmenti della superficie sferica. Così per esempio, la callotta generata dal rivolgimento del mezzo segmento circolare *Bor* intorno a *Br* è equivalente alla superficie curva del cilindro generato dal rettangolo *EBrm*; dappoichè hanno la stessa misura, cioè la circonferenza di un circolo massimo per l'altezza *Br*.

PROPOSIZIONE CVII — *TEOREMA.*

279. *Il cono sta alla sfera cui è circoscritto come 9: 4, tanto, rispetto alla superficie totale, quanto alla solidità* (fig. 57).

Dim. Sia *SAD* un triangolo equilatero circoscritto al cerchio *EBF*. Nel simultaneo rivolgimento del semicircolo *EBH*, e del triangolo *SBA* intorno a *SB*, si avrà un cono retto circoscritto ad una sfera. Or se si congiunga il punto *A* col centro *C*, la retta *AC* dividerà in due parti uguali l'angolo formato dalle due tangenti *AE*, *AB*, ma la retta *SB* divide ancora per metà l'angolo *ESF*, dunque i due triangoli *SAB*, *ACB* sono equiangoli; e perciò simili, e si avrà

$$SA : AB :: AC : CB.$$

Laonde essendo *SA* doppia di *AB*, sarà ancora *AC* doppia del raggio *CB*, e per conseguenza il quadrato di *AC* risulterà quadruplo del quadrato di *CB*. Ma da un'altra parte il quadrato di *AC* è uguale ai quadrati di *AB*, *CB*; poichè è retto l'angolo *ABC*, dunque il quadrato di *AB* è triplo del quadrato di *CB*; e perciò il cerchio che serve di base al cono sarà triplo di un cerchio massimo.

Ciò premesso, si osservi che la superficie convessa del cono ha per misura la circonferenza delle base per *AE*, che è la metà del lato *SA* del cono, ovvero ha per misura la circonferenza delle base pel raggio *AB* della base medesima; per conseguenza la superficie curva del cono sarà doppia di quella base, la quale essendo uguale a tre cerchi massimi, risulterà infine che la superficie curva del cono è uguale a sei cerchi massimi, e perciò la superficie totale del cono sarà uguale a nove cerchi massimi. Dunque la superficie totale del cono starà a quella della sfera come 9: 4.

Lo stesso rapporto sussiste per i volumi. Infatti, il cono ha per misura la sua base pel terzo della sua altezza *SB*, ovvero ha per misura il prodotto di tre cerchi massimi pel raggio *CB*, che è la terza parte di *SB*, perchè *CS* è uguale a *CA*, e questa è doppia di *CB*; oppure ha per misura un cerchio massimo per 9/3 del raggio *CB*. Ma la sfera ha per misura la sua superficie pel terzo del raggio *CB*, ovvero quattro cerchi massimi pel terzo del raggio *CB*, o infine un cerchio massimo per 4/3 del raggio *CB*, dunque il cono sta alla sfera come 9/3 a 4/3, ossia come 9: 4.

280. *Scolio* I. Dalle due proposizioni precedenti si deduce che il cilindro circoscritto alla sfera è medio proporzionale fra la sfera ed il cono ad essa circoscritto, tanto rispetto alla superficie, quanto alla solidità, perchè i tre numeri 9, 6, e 4 formano una proporzione continua (*).

(*) Se il cono, ed il cilindro fossero iscritti alla sfera, non avrebbe più luogo la proporzione in quanto ai volumi, ma soltanto per ciò che spetta alle superficie.

281. *Scolio* II. Si è veduto (n° 266) come s' iscrive in una sfera un poliedro. Or è manifesto che si potrebbe concepire un poliedro simile, di cui tutte le facce fossero tangenti alla sfera: in tal caso il poliedro accennato potrà considerarsi come composto di piramidi aventi per altezza comune il raggio della sfera, e per basi le differenti facce del poliedro. Quindi il volume del poliedro medesimo si avrà con moltiplicare la sua superficie pel terzo del raggio della sfera iscritta; ma questa ha per misura il prodotto della sua superficie pel terzo del raggio, dunque le solidità dei poliedri circoscritti alla sfera stanno come le superficie di questi medesimi solidi, e per conseguenza la proprietà dimostrata (n°. 277) pel cilindro circoscritto alla sfera appartiene ad una infinità di altri solidi. Infine giova osservare che siffatta proprietà è analoga a quella che hanno i poligoni circoscritti ad uno stesso cerchio, poichè le aje di questi poligoni stanno come i loro perimetri.

CAPITOLO V.

DEI POLI DEI CIRCOLI DELLA SFERA.

282. *Definizione* I. Il *polo* di un circolo della sfera è un punto della superficie sferica, il quale è ugualmente distante da tutt' i punti della circonferenza del circolo medesimo.

283. *Definizione* II. Il diametro della sfera, il quale è perpendicolare al piano di un circolo della sfera, dicesi *asse* dello stesso circolo.

PROPOSIZIONE CVIII — *TEOREMA*.

284. *Ogni circolo della sfera ha due poli situati agli estremi del suo asse* (fig. 48).

Dim. Sia in primo luogo un circolo massimo *DLC*, ed *AB* il suo asse. Si conducano per questo asse i circoli massimi *ADB*, *ALB*, ecc.. e dal centro *O* della sfera si tirino i raggi *OD*, *OL*, *OC*, ecc.

Essendo *AO* perpendicolare al piano *DLC*, le corde degli archi *AD*, *AL*, *AC*, ecc: saranno eguali come oblique che si allontanano egualmente dalla perpendicolare; e però saranno eguali gli archi medesimi. Lo stesso si verifica per gli archi *DB*, *LB*, *CB*, ecc., dunque i punti *A*, e *B* sono poli del circolo massimo *DLC*.

In secondo luogo sia *MKN* un circolo minore, ed *AB* il suo asse. Dal centro *E* di questo circolo si tirino i raggi *EM*, *EK*, *EN*, ecc., si dimostrerà come sopra che le corde degli archi *AM*, *AK*, *AN*, ecc., sono eguali, per conseguenza questi medesimi archi saranno eguali, come pure gli archi *MB*, *KB*, *NB*, ecc., e si conchiuderà come precedentemente che i punti *A*, e *B* sono poli del circolo minore *MKN*; il che si doveva dimostrare.

285. *Corollario* I. Si deduce da questo teorema che due circoli

massimi non possono avere uno stesso polo; perocchè congiungendo questo polo col centro comune dei due circoli, la retta congiungente sarebbe perpendicolare in uno stesso punto a due piani diversi; il che non può sussistere.

286. *Corollario* II. Se per i poli di un circolo massimo *DLC* si faccia passare un altro circolo *ALB*, ciascuno degli archi *AL*, *BL*, sarà un *quadrante*, cioè la quarta parte della circonferenza di un circolo massimo; ed il suo piano sarà perpendicolare al piano *DLC*.

Reciprocamente, se la distanza di un punto di un circolo al polo di questo circolo è uguale ad un quadrante, esso circolo sarà massimo; e se un circolo massimo è perpendicolare ad un altro circolo massimo, il primo passerà per i poli del secondo.

287. *Corollario* III. Per le proprietà de' poli si possono descrivere sulla superficie della sfera archi di cerchio come sopra un piano. Infatti, se si ponga la punta di un compasso in *A*, e con un dato intervallo *AM* si faccia girare il compasso intorno ad *A*, l'altra punta descriverà la circonferenza *MKN*. Se l'intervallo è uguale al quadrante *AD*, si descriverà una circonferenza *DLC* di circolo massimo.

288. *Definizione* III. Se due archi di circoli massimi s' incontrano sulla superficie della sfera, l'angolo da essi compreso sarà l'angolo formato dai piani, ne' quali gli archi si ritrovano.

PROPOSIZIONE CIX — *TEOREMA*.

289. *L' angolo* MAK *che fanno tra loro due archi* AM, AK *di circoli massimi, è uguale all' angolo* RAF *formato dalle tangenti condotte a questi archi dal punto* A: *esso ha ancora per misura l' arco* DL *descritto dal punto* A *come polo fra i lati* AM, AK, *prolungati, se occorra* (fig. 48).

Dim. Infatti, la tangente *AR* tirata nel piano dell'arco *AM* è perpendicolare al raggio *AO*; e la tangente *AF* condotta nel piano dell' arco *AK* è perpendicolare allo stesso raggio; per conseguenza l' angolo *RAF* è uguale all'angolo *DOL* che misura l' inclinazione de' due piani *OAD*, *OAL*, che è quella degli archi *AM*, *AK*. Ma l'angolo *DOL* è misurato dall' arco *DL*, dunque ancora l' arco *DL* è la misura dell'angolo formato dagli archi *AM*, *AK*, come si doveva dimostrare.

290. *Corollario* I. Gli angoli *ALD*, *BLC* opposti al vertice sono eguali, perchè l' uno e l' altro è sempre l'angolo formato dagli stessi piani *ALB*, *DLC*.

291. *Corollario* II. Se un arco *AL* incontra un altro *DC*, la somma degli angoli adiacenti *ALD*, *ALC* è sempre uguale a due angoli retti.

PROPOSIZIONE CX — *PROBLEMA.*

292. *Trovare il polo di un arco di circolo massimo* (fig. 48).

Sol. Sia DL l'arco dato. Dai punti D, e L come poli, e coll'intervallo di un quadrante si descrivano sulla superficie sferica due archi che si taglieranno in un punto A. Gli archi AD, AL saranno quadranti, e però gli angoli AOD, AOL saranno retti, la retta AO sarà perpendicolare al piano DLC, ed il punto A sarà il polo del circolo massimo DLC, ovvero dell arco DL; il che si doveva fare.

PROPOSIZIONE CXI — *PROBLEMA.*

293. *Descrivere su la superficie della sfera un arco di circolo massimo, che passi per due punti dati* (fig. 48).

Sol. Siano D, e L i due punti dati. Da ciascuno di questi punti come poli, e coll'intervallo di un quadrante si descrivano sopra la superficie sferica due archi, che si taglieranno in un punto A, che sarà il polo dell'arco di circolo massimo, che passa per i punti D, e L. Se dunque col punto A come polo, e coll'intervallo di un quadrante si descriva un arco, questo passerà per i punti D, e L, e sarà l'arco richiesto.

PROPOSIZIONE CXII — *PROBLEMA.*

394. *Da un punto di un arco di circolo massimo condurre un altro arco di circolo massimo perpendicolare al primo* (fig. 48).

Sol. Sia DS un arco di circolo massimo, e L il punto dato in esso. Si trovi il polo A dell'arco DL, poi per i due punti A, e L si faccia passare un arco di circolo massimo AL, questo sarà l'arco richiesto.

PROPOSIZIONE CXIII — *PROBLEMA.*

295. *Per un punto dato su la superficie della sfera condurre un arco di circolo massimo perpendicolare ad un arco dato* (fig. 48).

Sol. Sia K il punto dato, e DS l'arco dato. Dal punto K come polo, e coll'intervallo di un quadrante si descriva un arco, che taglierà l'arco DS, prolungato se occorra, in un punto C; poi da questo punto come polo, e collo stesso intervallo di un quadrante si descriva un arco KL, questo sarà l'arco richiesto, Infatti, essendo CL un quadrante, l'arco KL sarà perpendicolare all'arco DS.

CAPITOLO VI.

DEI TRIANGOLI SFERICI.

296. *Definizione* I. Si chiama *triangolo sferico* una parte della superficie della sfera compresa fra tre archi di circoli massimi, ciascuno de' quali dev' esser minore di una semi-circonferenza.

297. *Definizione* II. I *lati* di un triangolo sferico sono gli archi che formano il suo perimetro. Gli *angoli* poi sono gli angoli che fanno i piani, ne' quali si trovano i lati accennati.

298. Da ciò si deduce che un angolo di un triangolo sferico sarà retto, o acuto, o ottuso, secondo la specie dell' angolo diedro formato dai due piani ne' quali si trovano i suoi lati.

299. Abbenchè si possano concepire descritti sulla superficie della sfera triangoli formati da tre archi di tre circoli minori, purtuttavolta di questi non si fa parola negli elementi di geometria, perchè essendo disuguali i circoli minori, i loro lati non hanno una costante curvatura, come avviene negli archi de' circoli massimi.

300. Se si prolunghi un lato AC (fig. 58) del triangolo sferico ABC, e si descriva la circonferenza ACE, di cui l' arco AC è parte, nascerà un secondo triangolo, che sarà formato dai tre archi AB, BC, ed $AEDC$. In questo secondo triangolo il lato $AEDC$ è maggiore di una mezza circonferenza; ma è manifesto che basta conoscere gli elementi, cioè i lati e gli angoli, del primo triangolo ABC per avere quelli del secondo.

Ed ecco perchè si considerano soltanto quei triangoli sferici, ne' quali ciascun lato è minore di mezza circonferenza,

301. *Definizione* III. Un triangolo sferico si dice *rettangolo, isoscele, equilatero*, negli stessi casi che un triangolo rettilineo.

302. *Definizione* IV. Una parte della superficie della sfera terminata da più archi di circoli massimi, dicesi *poligono sferico* (fig. 59).

303. *Definizione* V. Si chiama *piramide sferica* la parte della sfera compresa fra i piani di un angolo solido, il cui vertice trovasi al centro della sfera medesima. Il poligono sferico, che è compreso fra i piani accennati, dicesi *base* della piramide sferica.

304. Da questa definizione si deduce che se si congiungano i tre vertici A, B, C (fig. 60) di un triangolo sferico per mezzo de' raggi AS, BS, CS, si formerà una piramide triangolare sferica $SABC$. Gli angoli diedri SA, SB, SC, saranno precisamente gli angoli del triangolo sferico ABC, e gli angoli piani ASB, BSC, ASC avranno per misura i lati di questo triangolo, poichè questi lati si possono considerare come descritti col centro comune S, e collo stesso raggio ne' tre piani che formano l' angolo solido S. Quindi tutte le quistioni relative ai triangoli sferici si riducono a quistioni relative agli angoli triedri con un semplice cangiamento di nomi, cioè

con dire *lati* in vece di *angoli piani*, ed *angoli* in vece di *angoli diedri*.

305. Il circolo che passa per i tre vertici A, B, C, (fig. 60), ovvero che è circoscritto al triangolo sferico ABC, è sempre un circolo minore della sfera; perchè se fosse un circolo massimo, i tre lati AB, BC, AC, sarebbero situati in un medesimo piano, ed il triangolo ABC si ridurrebbe ad uno de' suoi tre lati.

De' triangoli sferici simmetrici.

306. *Definizione* VI. Due triangoli sferici si dicono *simmetrici*, quando essendo descritti sopra una stessa sfera, o sopra sfere uguali, gli angoli triedri corrispondenti sono simmetrici.

307. Da questa definizione si deduce che ne' triangoli sferici simmetrici i lati, e gli angoli sono rispettivamente eguali, ma non sono disposti collo stesso ordine; e però non si può mai dimostrare la loro eguaglianza per mezzo della sovrapposizione; eccetto il caso de' triangoli sferici isosceli; perocchè, come è manifesto, questi non possono essere simmetrici. Quindi

Due triangoli sferici isosceli sono eguali, quando hanno i tre lati rispettivamente eguali.

Infatti, in tal caso sono eguali gli angoli triedri corrispondenti.

308. Un triangolo sferico non può avere che un solo simmetrico, perchè un angolo triedro non può avere che un solo simmetrico.

PROPOSIZIONE CXIV — *PROBLEMA.*

309. *Descrivere un triangolo sferico simmetrico ad un triangolo dato* (fig. 25).

Sol. Sia ABC il triangolo sferico dato. Si uniscano i vertici A, B, C, col centro S della sfera, e si prolunghino i raggi AS, BS, CS finchè incontrano la superficie della sfera nei punti A', B', C'; poi si conducano gli archi di circoli massimi $A'C'$, $A'B'$, $B'C'$, il triangolo $A'B'C'$ sarà il triangolo richiesto; poichè si è dimostrato altrove (n° 74) che gli angoli triedri $SABC$, $SA'B'C'$ sono simmetrici.

310. *Scolio* I. Questo problema si potrebbe ancora risolvere per mezzo delle proprietà de' poli, ma la soluzione precedente è assai più semplice.

311. *Scolio* II. Per lungo spazio di tempo si è considerata l'eguaglianza dei triangoli sferici simmetrici come analoga a quella de' triangoli rettilinei. Senza dubbio i geometri vedevano che la superficie sferica non si può rovesciare come il piano; e che per conseguenza era impossibile dimostrare l'eguaglianza delle aje de' triangoli sferici simmetrici colla sovrapposizione; ma deducevano una siffatta eguaglianza dalla eguaglianza degli elementi de' triangoli accennati, analogamente a ciò che abbiamo detto (n° 73) intorno

alla eguaglianza degli angoli triedri simmetrici, non essendovi alcuna ragione perchè debbano differire l' uno dall' altro. Purtuttavolta potendosi oggi dimostrare a rigore l' eguaglianza delle aje dei triangoli sferici simmetrici, daremo qui appresso la dimostrazione di questo teorema, che ricaveremo dalle proprietà dei poli.

PROPOSIZIONE CXV — *TEOREMA.*

312. *I triangoli sferici simmetrici sono equivalenti* (fig. 61).

Dim. Siano ABC, DEF due triangoli sferici simmetrici, nei quali sia il lato $AB = DE$, $AC = DF$, e $BC = EF$: dico che l' aja del triangolo ABC è uguale a quella del triangolo DEF. Infatti, i lati dei due triangoli essendo eguali ciascuno a ciascuno, le corde da essi sottese saranno pure eguali e formeranno triangoli rettilinei eguali; per conseguenza i circoli circoscritti a questi triangoli saranno eguali. Quindi se per i poli O, e P di questi circoli si conducano archi di circoli massimi agli angoli dei triangoli proposti, questi archi saranno eguali (n° 282), e si formerà in questo modo sopra ogni lato de' triangoli proposti un triangolo sferico isoscele. Or i tre triangoli isosceli del primo de' triangoli dati sono rispettivamente uguali ai tre del secondo (n° 307), dunque le aje dei triangoli proposti saranno formate nello stesso modo con quelle dei nuovi triangoli; e però i triangoli sferici simmetrici sono equivalenti, come si doveva dimostrare.

313. *Scolio.* Se i poli O, e P dei circoli circoscritti ai triangoli cadessero fuori di questi, la dimostrazione sarebbe sempre la stessa, come si può vedere facilmente.

314. *Corollario.* Se si congiungano i vertici dei triangoli ABC, DEF (fig. 61) col centro della sfera, o con i centri di due sfere eguali, le piramidi triangolari sferiche simmetriche, che ne risulteranno, saranno equivalenti. Infatti, è manifesto dalla proposizione precedente che le due piramidi saranno composte di parti eguali ciascuna a ciascuna, abbenchè non siano disposte con lo stesso ordine.

Inoltre, si dimostra similmente che gli angoli solidi triedri simmetrici, formati ai vertici delle due piramidi, sono equivalenti. Questa verità, alla quale arrivammo per altra strada (n° 73), si trova ora messa in piena luce, e rigorosamente dimostrata.

Caratteri dell' eguaglianza dei triangoli sferici.

315. Paragonando i triangoli sferici con gli angoli triedri corrispondenti, e richiamando ciò che è stato dimostrato (n°. 72, 77, 78, 79), risulta che due triangoli sferici descritti su la medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono eguali o simmetriche, se si avvera una delle seguenti condizioni.

1°. *I tre lati eguali ciascuno a ciascuno.*

2°. *Un angolo eguale compreso fra due lati eguali ciascuno a ciascuno.*

3°. *Un lato eguale adiacente a due angoli eguali ciascuno a ciascuno.*

4°. *I tre angoli eguali ciascuno a ciascuno.*

316. Quest' ultimo carattere di eguaglianza non ha luogo, come vedemmo nella geometria piana, nei triangoli rettilinei, perchè in questi se gli angoli sono eguali ciascuno a ciascuno, i lati non sono eguali, ma sono proporzionali. All' opposto nei triangoli sferici, che hanno gli angoli eguali, e sono descritti sopra una medesima sfera, o sopra sfere uguali, se i lati fossero proporzionali, essi diverrebbero eguali come archi simili di circonferenze, che hanno i raggi eguali. Quindi nei triangoli sferici descritti sopra la stessa sfera, se gli angoli sono eguali, i triangoli non saranno simili, ma eguali, o simmetrici, saranno nondimeno simili, se posta l'eguaglianza degli angoli, sono descritti sopra sfere, che abbiano raggi disuguali.

Dei triangoli sferici supplementarj.

317. *Definizione.* Due triangoli sferici si dicono *supplementarj*, quando essendo descritti sopra una stessa sfera, o sopra sfere eguali, gli angoli triedri corrispondenti sono supplementarj.

318. Apparisce da questa definizione che se nel centro di una sfera si situano due angoli triedri supplementarj, i triangoli sferici determinati dalle intersezioni delle facce di questi angoli colla superficie sferica, saranno supplementarj, ed in tal modo si vede come si possa descrivere un triangolo sferico, che sia supplementario ad un altro triangolo dato. Da ciò poi si deduce che ogni triangolo sferico ha il suo supplementario, vale a dire che ad ogni triangolo sferico corrisponde un altro triangolo, di cui i lati, e gli angoli sono rispettivamente supplementi degli angoli. e dei lati del primo.

E poichè le cose precedenti si possono ancora dimostrare per mezzo delle proprietà dei poli, così è avvenuto che i triangoli sferici supplementarj si chiamano ancora *triangoli sferici polari*. Ma avendo noi a suo luogo parlato dell' angolo triedro supplementario, non abbiamo bisogno di ricorrere alle proprietà dei poli.

Proprietà dei triangoli sferici.

PROPOSIZIONE CXVI — *TEOREMA.*

319. *In ogni triangolo sferico un lato qualunque è minore della somma degli altri due* (fig 60).

Dim. Sia ABC un triangolo sferico; e $SABC$ l'angolo triedro corrispondente. Or in ogni angolo triedro ciascun angolo piano è minore della somma degli altri due (n° 66) ; dunque ciascuno degli archi AB, AC, BC che misurano questi angoli, dovrà esser minore della somma degli altri due: il che si doveva dimostrare.

PROPOSIZIONE CXVII — *TEOREMA.*

320. *Il più corto cammino fra due punti* A, *e* B *situati sopra la superficie di una sfera è il più piccolo dei due archi del circolo massimo che passa per questi due punti* (fig. 62).

Dim. Infatti, si supponga che il più corto cammino fra i punti A. e B non sia l'arco AB di circolo massimo, ma una linea $AMNB$ differente dall'arco AB. Si prenda un punto M su questa linea, e per i punti A, M, e B, M si facciano passare gli archi AM, MB di circoli massimi; risulterà il triangolo sferico AMB; e per conseguenza (n° 319), si avrà

$$AM + MB > AB.$$

Prendendo in seguito un punto N tra M, e B, e conducendo gli archi MN, e NB di circoli massimi, si avrà ancora

$$MN + NB > MB.$$

e però aggiungendo dall' una e dall'altra parte l'arco AM, risulterà

$$AM + MN + NB > AM + MB.$$

Proseguendo nello stesso modo, si rende manifesto che il cammino fra i punti A, e B va crescendo a misura che più ci avviciniamo alla linea $AMNB$, e per conseguenza è evidente che l'arco AB è il più corto cammino fra i punti A, e B; e non vi potrebbe essere altro arco, poichè fra due punti A, e B situati su la superficie di una sfera non può passare che un solo circolo massimo; il che si doveva dimostrare.

321. *Scolio* I. Nella dimostrazione precedente si è supposto che la linea $AMNB$ fosse esterna a tutti gli archi di circoli massimi condotti per due qualunque de' suoi punti. Ma se accadesse l'opposto, come si vede nella parte punteggiata $MN'A$, si condurrebbero gli archi MN', ed AN' di circoli massimi; e poichè risulterebbe

$$AN' + MN' > AM,$$

si conchiuderebbe come sopra che $AN' + MN' + MN + NB$ è maggiore di $AM + MB$, ovvero di AB.

322. *Scolio* II. Essendo l'arco di circolo massimo la misura di ogni distanza sferica, anche per questa ragione si adoperano i soli archi di circoli massimi per lati de' triangoli sferici, e non quelli di circoli minori.

PROPOSIZIONE CXVIII — *TEOREMA*

323. *La somma dei tre lati di ogni triangolo sferico è minore della circonferenza di un circolo massimo* (fig. 60).

Dim. Infatti, essendo nell'angolo triedro $SABC$ la somma dei tre angoli piani minore di quattro angoli retti, la somma dei lati del triangolo sferico ABC, che misurano i detti angoli piani, dovrà

essere minore di una circonferenza di circolo massimo che misura i quattro angoli retti.

324. *Scolio.* Si dimostra similmente che

La somma de' lati di ogni poligono sferico è minore della circonferenza di un circolo massimo (fig. 59).

Perocchè nell'angolo solido corrispondente al poligono *ABCDE*, la somma degli angoli piani è minore di quattro angoli retti; e per conseguenza la somma de' lati del poligono dev' essere minore della circonferenza di un circolo massimo.

PROPOSIZIONE CXIX — *TEOREMA.*

325. *La somma degli angoli di un triangolo sferico è minore di sei, e maggiore di due angoli retti* (fig. 60).

Dim. Infatti, ciascun angolo di un triangolo sferico *ABC* è minore di due retti; e perciò la somma dei tre angoli è minore di sei retti. Di più, ciascun angolo del triangolo *ABC* è il supplemento di un lato del triangolo sferico supplementario (n° 318), e per conseguenza equivale ad una mezza circonferenza meno questo lato. Dunque la somma dei tre angoli del triangolo *ABC* vale tre mezze circonferenze meno i tre lati del triangolo supplementario. Or questi tre lati valgono meno di due mezze circonferenze (n° 323), perciò se da tre mezze circonferenze si toglie una quantità minore di due mezze circonferenze, il resto sarà maggiore di una mezza circonferenza. Quindi la somma dei tre angoli del triangolo *ABC* avrà per misura un arco maggiore di una mezza circonferenza; e però la detta somma sarà maggiore di due angoli retti.

326. *Corollario* I. Dal teorema precedente apparisce che la somma dei tre angoli di un triangolo sferico non è costante come quella dei tre angoli di un triangolo rettilineo; ma varia da due sino a sei angoli retti senza mai uguagliare nè l'uno nè l'altro limite. Laonde essendo dati due angoli di un triangolo sferico non si può trovare il terzo angolo: e così pure è manifesto che l'angolo esterno di un triangolo sferico non è uguale, ma minore della somma dei due interni ed opposti.

327. *Corollario* II. Si deduce ancora che un triangolo sferico può avere due o tre angoli retti, due o tre angoli ottusi. Il triangolo sferico, che ha due angoli retti, dicesi *bi-rettangolo;* chiamasi poi *tri-rettangolo* quando ha tre angoli retti.

Se il triangolo *ADL* (fig. 48) ha retti due angoli *D*, e *L*, il vertice *A* sarà il polo dell'arco *DL*, e ciascuno de' lati *AD*, *AL* sarà un quadrante.

Se poi si suppone che il lato *DL* sia esso pure un quadrante, allora il triangolo *ADL* sarà tri-rettangolo, e sarà contenuto otto volte nella superficie della sfera.

PROPOSIZIONE CXX — *TEOREMA*.

328. *In ogni triangolo sferico isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali. Reciprocamente se due angoli di un triangolo sferico sono uguali, i lati ad essi opposti saranno pure uguali* (fig. 63).

Dim. Sia ABC un triangolo sferico isoscele, nel quale si supponga $AB = AC$. Si divida la base in due parti uguali nel punto D, e si faccia passare l'arco di circolo massimo AD; si avranno i due triangoli ABD, ACD, nei quali essendo i tre lati rispettivamente uguali, sarà l'angolo $B = C$.

In secondo luogo, supponendo che abc sia il triangolo supplementario del triangolo proposto, dall'essere $B = C$ si deduce $ac = ab$; e quindi sarà l'angolo $b = c$; dal che infine risulta l'uguaglianza dei lati AC, AB.

329. *Corollario*. Apparisce da questo teorema che

1°. *Un triangolo sferico equilatero è anche equiangolo, e reciprocamente.*

2°. *In un triangolo sferico isoscele l'arco di circolo massimo condotto dal vertice al punto di mezzo della base è perpendicolare a questa base, e divide l'angolo al vertice in due parti uguali.*

PROPOSIZIONE CXXI — *TEOREMA*.

330. *In ogni triangolo sferico il lato opposto all'angolo maggiore è maggiore del lato opposto all'angolo minore; e reciprocamente* (fig. 64).

Dim. Sia in primo luogo l'angolo B maggiore dell'angolo A, sarà il lato AC maggiore del lato CB. Infatti si conduca l'arco di circolo massimo BD in guisa che risulti l'angolo $ABD = A$ (*): in virtù della proposizione precedente si avrà $BD = AD$. Ma nel triangolo BDC, il lato BC è minore della somma dei lati BD, DC, ovvero di $AD + DC$; dunque AC è maggiore di CB.

In secondo luogo, sia il lato AC maggiore del lato CB, sarà l'angolo B maggiore dell'angolo A; poichè se fosse minore, o uguale, nel primo caso sarebbe il lato AC minore del lato CB, e nel secondo caso si avrebbe $AC = CB$, contro la supposizione in ambidue i casi; per conseguenza dev'essere l'angolo B maggiore dell'angolo A.

(*) Ciò è sempre possibile. Infatti, si divida l'arco AB in due parti uguali, e pel punto di mezzo si faccia passare un arco di circolo massimo perpendicolare ad AB, che incontri l'arco AC nel punto D; indi per questo punto e pel punto B si faccia passare un arco di circolo massimo DB, risulteranno due triangoli rettangoli uguali, e però sarà l'angolo $ABD = A$.

PROPOSIZIONE CXXII — *TEOREMA.*

331. *Se due triangoli sferici, descritti su la stessa sfera, o sopra sfere eguali, hanno due lati uguali respettivamente a due lati, ma l'angolo compreso dai due primi è maggiore dell angolo compreso dai due secondi, sarà il terzo lato del primo triangolo maggiore del terzo lato del secondo; e reciprocamente.*

La dimostrazione è simile a quella fatta pel caso analogo nei triangoli rettilinei.

Misura del fuso, del triangolo sferico, e del poligono sferico.

PROPOSIZIONE CXXIII — *TEOREMA.*

332. *Il fuso sta alla superficie della sfera come l'angolo dei semicircoli massimi che comprendono il fuso sta a quattro angoli retti* (fig. 65).

Dim. Sia il fuso *AMBN* compreso dai due semicircoli massimi *AMB*, *ANB* che terminano al diametro comune *AB*. L'angolo *MAN* formato dai due archi *AM*, *AN*, e che dicesi *angolo del fuso*, può essere misurato (n° 289) dall'angolo *MON*, ovvero dall'arco *MN* del circolo massimo *MNP*, che ha per asse il diametro *AB*. Oltre a ciò, è evidente che sopra una medesima sfera due fusi sono uguali quando i semicircoli che li comprendono formano tra loro angoli uguali. Ciò premesso, è facile dimostrare la proposizione enunciata. Infatti, supponiamo in primo luogo che l'arco *MN* sia commensurabile colla circonferenza *MNP*; e che stia a questa come 3 a 12. Dividendo la circonferenza in 12 parti uguali, l'arco *MN* conterrà 3 di queste parti; poi facendo passare per i punti di divisione, e per i punti *A*, *B*, 12 circoli massimi, la superficie sferica sarà decomposta in 12 fusi uguali, 3 dei quali saranno contenuti nel fuso *AMBN*. Quindi il fuso accennato sta alla superficie sferica come l'arco *MN* alla circonferenza *MNP*, oppure come l'angolo *MAN* del fuso sta a quattro angoli retti.

Se l'arco *MN* fosse incommensurabile colla circonferenza *MNP*, la proposizione enunciata si dimostrerebbe col ragionamento fatto nella geometria piana in un caso analogo (*).

333. *Scolio.* È manifesto che colla stessa dimostrazione si potrebbe provare che l'unghia sferica *AMBN* sta alla sfera come l'arco *MN* sta alla circonferenza *MNP*.

(*) Vedi Geom. Piana n° 378.

PROPOSIZIONE CXXIV — *TEOREMA.*

334. *Il fuso ha per misura il prodotto del suo arco moltiplicato pel diametro della sfera; e l' unghia ha per misura il prodotto del fuso moltiplicato pel terzo del raggio della sfera medesima* (fig. 65).

Dim. Imperocchè, si ha dalla proposizione precedente che il fuso *AMNB* sta alla superficie sferica come l'arco *MN* alla circonferenza *MNP*; per conseguenza il fuso accennato sta alla superficie sferica come l' arco *MN* moltiplicato pel diametro *MP* sta alla circonferenza *MNP* moltiplicata per lo stesso diametro. Ma la circonferenza *MNP* moltiplicata pel suo diametro è la misura della superficie sferica, dunque il fuso ha per misura l'arco *MN*, che misura il suo angolo, moltiplicato pel diametro della sfera.

In secondo luogo, essendo l'unghia sferica alla sfera come il fuso alla superficie sferica, sarà l' unghia alla sfera come il fuso moltiplicato pel terzo del raggio della sfera sta alla superficie sferica moltiplicata pel terzo dello stesso raggio. Ma la superficie sferica moltiplicata pel terzo del raggio della sfera è la misura di questa, dunque l' unghia avrà per misura il fuso moltiplicato pel terzo del raggio della sfera.

335. *Corollario* I. Il settore circolare *MON* avendo per misura il prodotto dell' arco *MN* per la metà del raggio *MO*, sarà in virtù della proposizione precedente il fuso *AMBN* quadruplo del detto settore. Quindi il triangolo sferico birettangolo *AMN*, che è metà del fuso, sarà doppio dello stesso settore circolare. Che se poi il triangolo *AMN* fosse trirettangolo, allora la sua aja sarebbe uguale a quella di un semicircolo massimo, cioè sarebbe la ottava parte della superficie sferica; e per conseguenza la superficie sferica potrà essere rappresentata da otto triangoli sferici trirettangoli.

336. *Corollario* II. Se dunque si prenda per unità delle superficie sferiche il triangolo trirettangolo, che chiameremo K, e per unità di angolo l' angolo retto, che chiameremo R, si avrà la proporzione qui appresso.

$$\textit{Fuso AMBN}: 8K :: \textit{arco MN}: \textit{circ. MNP}.$$

ovvero, chiamando A l' angolo del fuso,

$$\textit{Fuso AMBN}: 8K :: A: 4R,$$

e moltiplicando per 2 i termini della seconda ragione,

$$\textit{Fuso AMBN}: 8K :: 2A: 8R,$$

e dividendo per 8 i conseguenti.

$$\textit{Fuso AMBN}: K :: 2A: R.$$

Ma in luogo di K, e R si possono mettere le unità che rappresentano, dunque si avrà in fine.

$$\textit{Fuso AMBN} = 2A.$$

vale a dire che il *fuso è uguale al doppio del suo angolo.*

Questa espressione è di pura convenzione: poichè essa serve a dinotare sotto forma abbreviata la proporzione or ora ottenuta,

cioè che il fuso sta al triangolo trirettangolo, che è l'unità superficiale, come il doppio dell'angolo del fuso sta all'angolo retto, che è l' unità angolare. La differenza sta dunque in questo; cioè, che nella proporzione le due unità, superficiale, ed angolare, sono espresse, mentre nella uguaglianza.

Fuso AMBN $= 2A$.

le stesse unità si devono sottintendere; il che non può mai produrre equivoco di sorta, e molto meno indurre in errore.

PROPOSIZIONE CXXV — *TEOREMA*.

337. *L'aja di un triangolo sferico ha per misura il raggio della sfera moltiplicato per la somma dei tre archi, che misurano i tre angoli del triangolo, diminuita di una mezza circonferenza* (fig. 66).

Dim. Sia *ABC* un triangolo sferico. Si prolunghino i tre lati, finchè si formino le circonferenze intere, delle quali fan parte, *BADE*, *CAFE*, *BCDF*. E poichè le circonferenze de' circoli massimi s' intersegano alla distanza di 180° (n° 222), gli archi *ACE*, *BCD*, *CAF* saranno mezze circonferenze; e le rette *AE*, *BD*, *CF* saranno diametri della sfera.

Ciò premesso, i triangoli *ABC*, *BCE* formano il fuso compreso dalle mezze circonferenze *ABE*, *ACE*, e che ha per angolo *A*. Similmente, i triangoli *ABC*, *ACD* formano il fuso compreso dalle mezze circonferenze *BAD*, *BCD*, il cui angolo è *B*: e finalmente, i triangoli *CED*, *FED* formano il fuso compreso dalle mezze circonferenze *CEF*, *CDF*, che ha per angolo *C*. Ma i triangoli *ABC*, *FED* sono simmetrici, perchè sono simmetrici gli angoli triedri *OABC*, *OEDF* (n° 309), dunque le loro aje sono eguali; e però i triangoli accennati equivalgono al fuso, che ha per angolo *C*.

Quindi se ai triangoli *BCE*, *CED*, *ACD* si aggiunga il triplo del triangolo *ABC*, la somma sarà eguale a quella dei tre fusi accennati. Ma la prima somma è uguale alle superficie dell'emisfero *ABEDC* più due volte il triangolo *ABC*, dunque la seconda somma, cioè quella dei tre fusi, equivale alla superficie dell' emisfero più due volte il triangolo *ABC*; e per conseguenza il doppio di questo triangolo sarà eguale alla somma dei tre fusi, diminuita della superficie dell'emisfero. Or ciascuno di quelli fusi equivale al prodotto dell' arco, che misura il proprio angolo, pel diametro della sfera, e la superficie dell'emisfero ha per misura il prodotto di una semicirconferenza di circolo massimo pel diametro medesimo, dunque il triangolo *ABC* preso due volte è uguale al diametro moltiplicato per la somma dei tre archi, che misurano i tre angoli del triangolo, diminuita di una mezza circonferenza; e perciò il triangolo *ABC* avrà per misura il raggio della sfera moltiplicato per la somma dei detti archi diminuita di una mezza circonferenza; come si doveva dimostrare.

338. *Corollario* I. La superficie della sfera avendo per misura il

diametro moltiplicato per la circonferenza di un circolo massimo, ovvero il raggio moltiplicato per due volte la circonferenza di un circolo massimo, segue dalla proposizione qui sopra dimostrata che la superficie del triangolo sferico sta a quella della sfera come la somma dei tre archi, che misurano gli angoli del triangolo, diminuita di una mezza circonferenza sta a due circonferenze di circolo massimo.

Quindi mettendo in luogo degli archi gli angoli da essi misurati, si avrà che

La superficie del triangolo sferico sta a quella della sfera come l'eccesso della somma dei tre angoli del triangolo sopra due angoli retti sta ad otto angoli retti.

339. *Corollario* II. Dal corollario precedente si deduce che se si dinota con E l'eccesso della somma dei tre angoli del triangolo sopra due retti, e si prende per unità delle superficie sferiche il triangolo trirettangolo, e per unità degli angoli l'angolo retto, e di più si osservi che la superficie sferica è uguale ad otto triangoli trirettangoli, il teorema sopraccenato sarà espresso dalla proporzione

$$\textit{Triangolo } ABC : 8 :: E : 8,$$

dalla quale si deduce evidentemente

$$\textit{Triangolo } ABC = E.$$

Quindi si potrà dire che

L'aja di un triangolo sferico qualunque ha per misura l'eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti.

Questa espressione abbreviata è di pura convenzione, e non può produrre veruno equivoco, allorchè vi si sottintendano le due unità, cioè l'una che serve di misura alle superficie sferiche, e l'altra agli angoli

340. *Scolio*. Giova ancora osservare che se si dividono per 8 i conseguenti della proporzione

$$\textit{Triangolo } ABC : 8 :: E : 8,$$

si avrà che

L'aja di un triangolo sferico sta al triangolo trirettangolo come l'eccesso della somma dei tre angoli del primo sopra due angoli retti sta all'angolo retto.

PROPOSIZIONE CXXVI — *TEOREMA*.

341. *L'aja d'un poligono sferico ha per misura la somma de' suoi angoli, diminuita del prodotto di due angoli retti pel numero dei lati del poligono meno due* (fig. 59).

Dim. Sia $ABCDE$ un poligono sferico. Da un vertice A di questo poligono si conducano a tutti gli altri vertici le diagonali AC, AD; il poligono proposto sarà diviso in tanti triangoli, quanti ne dinota il numero de' lati meno due. Or, l'aja di ciascun triangolo ha per misura la somma de'suoi tre angoli meno due angoli retti (n° 329); ed è poi manifesto che la somma di tutti gli angoli dei

triangoli è uguale alla somma degli angoli del poligono, dunque l'aja dello stesso poligono dovrà avere per misura la somma de'suoi angoli diminuita di tante volte due angoli retti, quante ne dinota il numero dei lati meno due.

342. *Scolio*. Per unità di misura delle superficie si prende ordinariamente il quadrato, che ha per lato l'unità di lunghezza. Stando a questa convenzione abbiam dato (n° 332) la misura del fuso, e del triangolo sferico, riducendo l'una e l'altra a quella di un rettangolo. Purtuttavolta abbiamo fatto vedere che si poteva prendere il triangolo trirettangolo per unità delle superficie sferiche, ed allora abbiam conosciuto l'espressioni delle aje del fuso, e del triangolo sferico, che risultavano, le quali davano luogo ad altre espressioni semplicissime, abbenchè fossero di semplice convenzione. Nella misura del poligono sferico si è resa manifesta l'utilità di queste espressioni; per mezzo di esse si abbreviano le dimostrazioni, e si ritengono facilmente le verità della scienza.

Misura della piramide sferica, e dell' angolo solido al vertice di essa.

PROPOSIZIONE CXXVII — *TEOREMA*.

343. *La piramide sferica triangolare ha per misura il prodotto della sua base pel terzo del raggio* (fig. 66).

Dim Sia *ABCO* una piramide sferica triangolare. Si ripeta la costruzione fatta nella proposizione (n° 337), ed in luogo de' triangoli sferici, e dei fusi si sostituiscano le piramidi triangolari, e le unghie sferiche corrispondenti. Si dimostrerà come nella proposizione accennata che la piramide *ABCO* presa due volte equivale alla somma delle tre unghie sferiche, che hanno per angoli rispettivi *A*, *B*, *C*, diminuita dell'emisfero *ACDEB*. Ma ciascuna di quelle unghie è uguale al prodotto del fuso corrispondente pel terzo del raggio (n° 334), e l'emisfero ha per misura il prodotto di mezza superficie sferica pel terzo del raggio (n° 266), dunque la piramide *ABCO* presa due volte è uguale al terzo del raggio moltiplicato per la somma de'tre fusi, diminuita di mezza superficie sferica. Or i tre fusi equivalgono alla metà della superficie della sfera più due volte il triangolo *ABC* (n° 337), per conseguenza la piramide *ABCO* dovrà avere per misura il prodotto della sua base pel terzo del raggio, come si doveva dimostrare.

344. *Corollario* I. Potendosi una piramide sferica poligonale scomporre in piramidi sferiche triangolari, segue che

Una piramide sferica qualunque ha per misura il prodotto del poligono sferico, che è base della piramide, pel terzo del raggio.

345. *Corollario* II. Due piramidi sferiche qualunque stanno come le loro basi.

346. *Corollario* III. Poichè la sfera ha per misura il prodotto della sua superficie pel terzo del raggio, ne consegue che

La piramide triangolare sferica sta alla sfera come il triangolo sferico, che forma la base della piramide, sta alla superficie sferica.

Se dunque si prenda per unità di superficie il triangolo sferico trirettangolo, e per unità di volume la piramide trirettangola, cioè quella che ha per base il triangolo trirettangolo; e di più si tenga presente che la sfera è uguale ad otto piramidi trirettangole, e la superficie sferica ad otto triangoli trirettangoli, si avrà che

La piramide triangolare sferica sta alla piramide trirettangola come il triangolo sferico, che forma la base della prima, sta al triangolo trirettangolo, che è la base della seconda.

PROPOSIZIONE CXXVIII — *TEOREMA.*

347. *Se per i punti* O, *ed o presi su gli spigoli di due angoli diedri* MCDN, mcdn, *si conducano i piani* AOB, aob *perpendicolari agli spigoli medesimi, gli angoli solidi triedri* OABD, oabd, *staranno fra loro come gli angoli piani corrispondenti agli angoli diedri* (fig. 17).

Dim. Nel piano *AOB* si descriva col centro in *O*, e con un raggio ad arbitrio l'arco *AB*: si pratichi lo stesso nel piano *aob*, prendendo per raggio $oa = OA$.

Ciò premesso, si supponga in primo luogo che gli archi *AB*, *ab* siano commensurabili, e che la loro comune misura sia contenuta *m* volte nell'arco *AB*, ed *n* volte nell'arco *ab*. Si divida l'arco *AB* in *m* parti eguali, portando la comune misura sopra di esso, e l'arco *ab* in *n* parti eguali, poi si congiungano i punti di divisione col centro *O*, e col centro *o*, le rette congiungenti, come *EO*, *eo*, saranno raggi, che divideranno l'angolo *AOB* in *m* parti eguali, e l'angolo *aob* in *n* parti eguali. Or, se per tutti questi raggi, e per gli spigoli *DC*, *dc* si facciano passare de'piani come *EDC*, *edc*, l'angolo solido triedro *OABD* sarà diviso in *m* angoli solidi triedri eguali fra loro, perchè l'uno può coincidere coll'altro, essendo ognuno formato da due angoli retti, come *DOA*, *DOE*, e da un angolo eguale all'angolo *AOE*. Lo stesso si dimostra per l'angolo triedro *oabd*, e per conseguenza i due angoli triedri accennati stanno come gli archi *AB*, *ab*, o come gli angoli piani *AOB*, *aob*, o in fine come gli angoli diedri *DC*, *dc*.

Se gli archi *AB*, *ab* fossero incommensurabili, avrebbe luogo la stessa proporzione, e ciò si dimostrerebbe come si è fatto nella geometria piana per gli angoli ai centi di cerchi eguali.

348. *Corollario*. Se si suppone che l'angolo diedro *dc* sia retto, gli angoli triedri *oabd*, *oabc*, saranno ambidue trirettangoli: e però sarà l'angolo diedro *DC* all'angolo diedro retto *dc* come la somma dei due angoli triedri *OABD*, *OABC*, che compongono il primo,

alla somma dei due angoli triedri trirettangoli, *oabd*, *oabc*, che compongono il secondo.

349. *Scolio*. Si noti che la proporzione accennata nel corollario precedente sussiste anche quando il piano *AOB* non è perpendicolare allo spigolo *DC*. Infatti, è manifesto che se in tal caso si conduca pel punto *O* un piano perpendicolare allo spigolo *DC*, la somma dei due angoli triedri, che ne risultano, sarà eguale a quella degli angoli triedri *OABD*, *OABC*. Or, l'angolo diedro *DC* ha per misura l'angolo piano corrispondente *MCK*, ovvero *C*, dunque se si prenda per unità degli angoli diedri l'angolo diedro retto, e per unità degli angoli triedri l'angolo triedro trirettangolo, la proporzione sopra mentovata diviene

$$C : 1 :: OABD + OABC : 2;$$

e facendo il prodotto degli estremi, e quello del medj, risulta

$$OABD + OABC = 2C,$$

vale a dire, sarà la somma dei due angoli triedri *OABD*, *OABC* eguale al doppio dell'angolo diedro *DC*; o in altri termini che il valore numerico della somma dei due angoli triedri è doppio del valore numerico dell'angolo diedro. L'eguaglianza accennata è di pura convenzione, e non può indurre in errore, come abbiamo osservato in altri casi analoghi.

PROPOSIZIONE CXXIX — *TEOREMA*.

350. *Un angolo triedro qualunque sta all' angolo triedro trirettangolo come la somma delle misure de' tre angoli diedri del primo, diminuita di due angoli retti, sta all' angolo retto* (fig. 66).

Dim. Sia *OABC* un angolo triedro qualunque. Si consideri il suo vertice *O* come il centro di una sfera, che abbia un raggio *OA* preso ad arbitrio, e si ripeta la costruzione fatta (n°. 337).

Per le cose dette nello scolio precedente il valore numerico della somma dei due angoli triedri *OABC*, *OBCE*, è doppio di quello dell'angolo diedro corrispondente, la cui misura è l'angolo *A*, per conseguenza si avrà.

$$OABC + OBCE = 2A.$$

Similmente si dimostra che il valore numerico della somma degli angoli triedri *OABC*, *OACD*, è doppio di quello dell'angolo diedro, che ha per misura l'angolo *B*; e finalmente il valore numerico della somma degli angoli triedri *OCED*, *OEDF*, ovvero *OCED*, *OABC*, perchè *OEDF* è simmetrico ad *OABC*, sarà doppio dell'angolo diedro, che ha per misura l'angolo *C*. Quindi ragionando come si è fatto nella misura della piramide sferica triangolare (n°. 343), si dimostrerà che il valore numerico dell'angolo triedro *OABC* preso due volte è uguale a quello della somma de' valori numerici dei tre angoli diedri accennati, diminuita di quello de' quattro triedri *OABC*, *OBCE*, *OCED*, *OACD*, che si appoggiano sull'emisfero. Ma questi equivalgono a quattro triedri trirettangoli, ed il valore numerico

di due triedri trirettangoli è doppio di quello di un angolo diedro retto, dunque il valore numerico dell' angolo triedro $OABC$ preso due volte è espresso da

$$2A + 2B + 2C - 4;$$

e per conseguenza sarà

$$OABC = A + B + C - 2.$$

Dalle cose precedenti è manifesto che in questa espressione $OABC$ dinota il rapporto di questo angolo triedro all'angolo triedro trirettangolo, che è la sua unità di misura, e che $A + B + C - 2$ indica il rapporto della somma delle misure de' tre angoli diedri del primo, diminuita di due angoli retti, all' angolo retto, poichè l' angolo retto essendo la misura dell' angolo diedro retto si può considerare come l' unità di misura degli angoli diedri, quindi il teorema proposto rimane dimostrato.

351. *Scolio.* Paragonando la misura dell'angolo triedro al vertice della piramide triangolare sferica $ABCO$ con quella del triangolo sferico ABC (n° 338) si vedrà che l'una, e l'altra è espressa da $A + B + C - 2$. Ma si è dimostrato (n° 345) che due piramidi sferiche triangolari, ed in generale due piramidi sferiche qualunque, che fanno parte di una medesima sfera, o di sfere uguali, stanno come i triangoli, o i poligoni sferici, che formano le loro basi, dunque.

Gli angoli solidi ai vertici delle piramidi accennate stanno essi pure nella proporzione delle basi.

Da ciò si deduce che quando si volesse determinare il rapporto di due angoli solidi qualunque, bisognerebbe immaginare descritte dai loro vertici come centri due superficie sferiche dello stesso raggio, e paragonare le aje de' poligoni intercetti fra le loro facce.

Se dunque si prende per unità di misura delle aje di quei poligoni il triangolo trirettangolo, e per unità di misura degli angoli solidi l'angolo triedro trirettangolo, il numero che dà l'aja del poligono sferico darà pure la misura dell' angolo solido corrispondente. Per esempio, se l'aja del poligono sferico è espressa da 4/5, vale a dire se è i 4/5 del triangolo trirettangolo, l'angolo solido corrispondente sarà ancora i 4/5 dell'angolo triedro trirettangolo.

Risoluzione di alcuni problemi.

PROPOSIZIONE CXXX — *PROBLEMA.*

352. *Essendo dati i tre lati di un triangolo sferico, trovare i suoi angoli* (fig. 67).

Soluzione. In luogo del triangolo sferico, si considererà l'angolo triedro, che risulta unendo i tre vertici del triangolo proposto col centro della sfera.

Sia dunque $SABC$ un angolo triedro, di cui sono dati i tre angoli piani, ASB, BSC, ASC, e supponiamo primieramente che si

voglia trovare l'angolo diedro *ASBC*. Per un punto *O* dello spigolo *SB* s'innalzino su questo nelle facce *ASB*, *BSC* le perpendicolari *OM*, ed *ON*, l'angolo *MON* è l'angolo che si vuole determinare, poichè esso è la misura dell'angolo diedro *ASBC*. Si prenda sul prolungamento di *SO* un punto *B* ad arbitrio, e sopra *SA* un punto *A* in modo che la retta *BA* incontri *OM* in un punto *M* situato fra *B* ed *A* (n° 70). Similmente si prenderà sopra *SC* un punto *C* tale che la retta *BC* incontri *ON* in un punto *N* situato fra *B* e *C*. Finalmente si condurranno la rette *AC*, *MN*.

Ciò premesso, si facciano sopra un piano gli angoli *asb*, *bcs*, *csa'* respettivamente uguali agli angoli *ASB*, *BSC*, *ASC* della figura solida; prendasi $sa = SA$, $sb = SB$, $sc = SC$, e si uniscano *ab*, *bc*, *ca'*. I triangoli *asb*, *bsc*, *csa* saranno respettivamente uguali ai triangoli *ASB*, *BSC*, *CSA*, perchè hanno un angolo uguale compreso fra lati uguali. Se dunque colle rette *ab*, *bc*, *ca'* si costruisce un triangolo *a''bc*, questo triangolo sarà uguale al triangolo *ABC*, poichè i loro lati sono respettivamente uguali.

Si prenda ora $bo = BO$, e che nella figura piana come in quella solida può esser qualunque, pel punto *o* si conduca *mn* perpendicolare sopra *sb*; il triangolo *mob* sarà uguale al triangolo *MOB*, poichè hanno un lato $bo = BO$, adiacente a due angoli uguali ciascuno a ciascuno, cioè $mob = MOB$ come retti, e $mbo = MBO$ a cagione della uguaglianza dei triangoli *asb*, ed *ASB*. Per la stessa ragione saranno uguali i triangoli *bon*, e *BON*, onde si avrà $om = OM$, ed $on = ON$,.

Si faccia inoltre $bm' = bm$, e si congiunga *m'n*, il triangolo *m'bn* sarà uguale al triangolo *MBN*; poichè hanno due lati uguali ciascuno a ciascuno, cioè $bm' = bm = BM$, e $bn = BN$; e questi lati sono compresi fra gli angoli *cba''*, e *CBA* uguali in virtù della uguaglianza dei triangoli *a''bc*, ed *ABC*. Quindi sarà $m'n = MN$.

Se dunque colle rette *om*, *on*, *m'n* si costruisca il triangolo *m'no'* questo triangolo sarà uguale al triangolo *MON*; dappoichè questi triangoli avranno i loro tre lati uguali ciascuno a ciascuno. Laonde l'angolo *m'o'n* sarà uguale all'angolo cercato *MON*.

Nello stesso modo si potranno ottenere i due altri angoli driedri, ossia gli angoli piani che li misurano.

353. *Scolio*. È facile vedere che la costruzione precedente può sempre applicarsi, qualunque sieno i tre angoli piani, purchè sono tali da poter formare un angolo triedro. Si vede ancora che il problema ammette una sola soluzione

PROPOSIZIONE CXXXI — *PROBLEMA*.

354. *Essendo dati i tre angoli di un triangolo sferico, trovare i suoi tre lati.*

Soluzione. Sostituendo al triangolo proposto l'angolo triedro che gli corrisponde, il problema si riduce a trovare gli angoli piani di

un angolo triedro allorchè sono dati i suoi angoli driedri M, N, P. Ciò posto, si chiami d l'angolo retto, e si consideri l'angolo triedro supplementario, gli angoli piani di questo saranno espressi da $2d-M$, $2d-N$, e $2d-P$. Quindi applicando le costruzioni fatte nella proposizione precedente si potranno determinare successivamente i tre angoli driedri dell'angolo triedro supplementario. Siano A, B, C questi tre angoli diedri, è manifesto che gli angoli piani dell'angolo triedro proposto verranno espressi respettivamente da $2d-A$, $2d-B$, e $2d-C$, e però il problema sarà risoluto.

PROPOSIZIONE CXXXII — *PROBLEMA.*

355. *Essendo dati due lati di un triangolo sferico, e l'angolo da essi compreso, trovare il terzo lato* (fig. 67)

Soluzione. Questo problema si riduce al seguente: dati in un angolo triedro due angoli piani e l'angolo diedro compreso, trovare il terzo angolo piano. Siano dunque ASB, e BSC i due angoli piani dati, s'innalzino sopra SB le perpendicolare OM, ed ON, e si ripeta la costruzione fatta (n° 342), l'angolo MON essendo la misura dell'angolo diedro $ASBC$ che si suppone dato, si conoscono nel triangolo MON due lati e l'angolo compreso. Quindi si può costruire questo triangolo, e dedurne l'angolo piano incognito ASC.

Infatti si costruiscano sopra un piano gli angoli asb, e bsc respettivamente uguali agli angoli ASB, e BSC della figura solida; e si prenda $sa=SA$, $sb=SB$, $sc=SC$. I triangoli asb, e bsc saranno respettivamente uguali ai triangoli ASB, e BSC. Si faccia inoltre $bo=BO$, e pel punto o si conduca la retta mn perpendicolare a sb; i triangoli mob e nob saranno rispettivamente uguali ai triangoli MOB, e NOB:

Ciò premesso, si costruisca un triangolo $m''o''n''$, in cui l'angolo $m''o''n''$ sia uguale all'angolo dato formato dalle facce ASB, e BSC. e sia $m''o''=mo=MO$, e $n''o''=no=NO$. Questo triangolo sarà uguale al triangolo MON, poichè avranno un angolo uguale compreso fra lati uguali; e ne risulterà $m''n''=MN$.

Coi lati mb, bn, e $m''n''$ si costruisca il triangolo $m'bn$; questo triangolo sarà uguale al triangolo MBN; poichè avranno i loro tre lati uguali ciascuno a ciascuno.

Su la retta bm' si prenda $ba''=ba$, e si congiunga ca'', il triangolo $a''bc$ sarà uguale al triangolo ABC, poichè gli angoli $a''bc$, ed ABC sono uguali a cagione della uguaglianza dei triangoli $m'bn$, e MBN; e di più si ha $bc=BC$, e $ba''=ba=BA$.

Da ciò risulta ancora $a''c=AC$. Si costruisca dunque un triangolo $a'sc$, di cui i lati sc, e sa' sieno uguali, e la base sia eguale ad $a''c$; questo triangolo sarà uguale al triangolo ASC, poichè essi avranno i loro tre lati uguali ciascuno a ciascuno. L'angolo $a'sc$ sarà dunque il terzo angolo piano richiesto.

356. *Scolio.* Conoscendo il terzo angolo piano, si potranno ottenere i due altri angoli diedri colla costruzione del n° 342.

E facile poi vedere che il problema proposto ammette una sola soluzione.

PROPOSIZIONE CXXXIII — *PROBLEMA.*

357. *Essendo dati un lato ed i due angoli adiacenti di un triangolo sferico, trovare i rimanenti lati, ed il terzo angolo.*

Soluzione. Sostituendo al triangolo sferico l'angolo triedro corrispondente, rappresentino A l'angolo piano dato M, ed N gli angoli che servono di misura agli angoli diedri adiacenti dati. In virtù del teorema del n° 68, l'angolo triedro supplementario avrà due angoli piani uguali a $2d-M$, ed a $2d-N$; e l'angolo diedro compreso sarà espresso da $2d-A$ (chiamando d l'angolo retto).

Applicando le costruzioni del problema precedente, si potrà determinare il terzo angolo piano del triedro supplementario, e poi colle costruzioni del n° 342, i suoi due altri angoli diedri. Sieno P il terzo angolo piano, B e C i due angoli diedri così determinati, l'angolo triedro proposto avrà necessariamente un terzo angolo diedro espresso da $2d-P$, ed i due altri angoli piani saranno respettivemente uguali a $2d-B$, ed a $2d-C$. Quindi tutte le sue parti saranno conosciute.

358. *Scolio.* La risoluzione de'problemi precedenti fa vedere che coll'ajuto dell'angolo triedro supplementario essi si riducone a due soli. Così pure, se fosseso dati di un triangolo sferico due lati ed un angolo opposto ad uno di questi lati, ovvero due angoli ed un lato opposto ad uno di questi angoli, la risoluzione dei due problemi accennati si ridurrebbe a quella di uno di essi in virtù dell'angolo diedro supplementario: ma noi non ci occuperemo di siffatta risoluzione, perchè non può farsi compiutamente colla pura geometria, senza ricorrere a costruzioni complicate, per cui la rimettiamo ai trattati di trigonometria sferica.

SCOLIO GENERALE.

359. Le proposizioni relative alla misura delle solidità dei poliedri, e quelle spettanti alla misura delle superficie e delle solidità dei tre corpi rotondi, essendo di una grande importanza nelle applicazioni pratiche della geometria, abbiamo stimato di dare in questo luogo l'espressioni le più brevi possibili delle principali misure fra quelle sopraccennate; e ciò si ottiene coll'ajuto dei simboli algebrici.

I. Sia B la base di un prisma, H la sua altezza; la solidità del prisma sarà espressa da $B \times H$.

II. Sia B la base di una piramide, H la sua altezza; la solidità della piramide verrà espressa da $B \times \frac{1}{3} H$.

III. Sia H l'atezza di un tronco di piramide a basi parallele, e siano A, e B le sue basi; sarà $\sqrt{AB}$ la media proporzionale fra queste basi; e però la solidità del tronco di piramide sarà.

$$\frac{1}{3} H \times (A + B + \sqrt{AB})$$

IV. Sia B la base di un tronco di prisma triangolare, H, H', H'', le altezze de'suoi tre vertici superiori, la solidità del prisma troncato sarà.

$$\frac{1}{3} B \times (H + H' + H'').$$

V. Sia R il raggio della base di un cilindro, H la sua altezza. La base sarà espressa da πR^2, come si è veduto nella geometria piana; e la solidità del cilindro sarà $\pi R^2 \times H$.

VII. La circonferenza della base sopraccennata essendo espressa da $2\pi R$, la superficie curva del cilindro sarà $2\pi R \times H$.

VIII. Sia R il raggio della base di un cono, H la sua altezza, la solidità del cono sarà
$\frac{1}{3} \pi R^2 \times H$; e se si dinoti con E il lato del cono medesimo, la superficie curva di questo sarà πRE. Di più se si chiami r il lato del quadrato equivalente al rettangolo $R \times E$, la superficie curva del cono sarà espressa da πr^2; e per conseguenza questa superficie sarà equivalente al cerchio, che ha per raggio la media proporzionale fra il raggio della base, e l'altezza del cono.

IX. Siano A e B i raggi delle basi di un tronco di cono a basi parallele, H la sua altezza; la solidità del tronco di cono sarà

$$\frac{1}{3} \pi H \times (A^2 + B^2 + AB).$$

X. Sia R raggio della sfera la sua superficie sarà $4\pi R^2$, e la sua solidità verrà espressa da $\frac{4}{3} \pi R^3$, ovvero da $\frac{2}{6} \pi D^3$, dinotando con D il diametro della sfera medesima.

XI Sia R il raggio di un settore sferico, H l'altezza della zona, che gli serve di base; la solidità del settore sarà.

$$\frac{2}{3} \pi R^2 \times H.$$

XII. Sia R il raggio della sfera, ed H l'altezza di una zona, l'espressione di questa sarà $2\pi R \times H$.

XIII. Sia R il raggio di una sfera, ed H l'altezza di un segmento sferico ad una base, la solidità del segmento sarà

$$\frac{1}{3} \pi H^2 \times (3R - H),$$

ovvero $$\pi H^2 \times (R - \frac{1}{3} H) \ldots\ldots (m).$$

Se in luogo del raggio della sfera si volesse introdurre in questa espressione il raggio BE (fig. 52) della base del segmento, che chiameremo K, si osserverà che BE è media proporzionale fra AE, ed ED, ossia fra H, e $2R - H$; per conseguenza sarà $K^2 = 2RH - H^2$, donde si deduce $R = \frac{K^2 + H^2}{2H}$. Sostituendo questo valore nell'espressione (m), e facendo le riduzioni opportune, la solidità del segmento sferico ad una base sarà espressa da

$$\pi K^2 \times \frac{H}{2} + \frac{\pi H^3}{6},$$

vale a dire che

Ogni segmento sferico ad una base equivale alla metà del cilindro, che ha la stessa base e la stessa altezza, più la sfera, che ha questa altezza per diametro.

E poichè il segmento sferico a due basi parallele è uguale alla differenza di due segmenti sferici, ciascuno de' quali ha una sola base, si rende manifesto che

Ogni segmento sferico compreso fra due piani paralleli, ha per misura la semi somma delle sue basi moltiplicata per la sua altezza, più la solidità della sfera, che ha questa stessa altezza per diametro.

Del resto possiamo assicurarci di questa verità, osservando che se la misura del segmento sferico a due basi fosse diversa dalla precedente, quando uno dei piani paralleli accennati diviene tangente alla sfera, la misura del segmento sferico ad una base, che allora risulterebbe, non sarebbe più quella dimostrata qui sopra.

Se dunque si chiamino P e Q le due basi di un segmento sferico, e H la sua altezza, la solidità di questo segmento sarà

$$\frac{P+Q}{2}\times H+\frac{\pi H^3}{6}.$$

È manifesto che questa espressione si può anche applicare al segmento, che abbia una sola base P; poichè in tal caso l'espressione accennata si riduce a

$$\frac{P\times H}{2}+\frac{\pi H^3}{6}.$$

INDICE

LIBRO PRIMO.

DE' PIANI E DEGLI ANGOLI SOLIDI.

CAP. I. Della linea retta e del piano in generale . . . *pag.* 1
CAP. II. Delle rette perpendicolari, ed oblique ai piani . . 3
CAP. III. Delle rette parallele fra loro, e delle rette parallele ai piani 7
CAP. IV. Dei piani paralleli fra loro 8
CAP. V. Degli angoli che le rette fanno tra loro nello spazio, e degli angoli che formano con i piani. . . 10
CAP. VI. Degli angoli formati da'piani, che s'incontrano, ovvero degli angoli diedri. 12
CAP. VII. Degli angoli solidi 16

LIBRO II.

DEI SOLIDI TERMINATI DA SUPERFICIE PIANE.

CAP. I. Dei poliedri in generale. 24
CAP. II. Dei poliedri eguali 29
CAP. III. Dei poliedri equivalenti 33
CAP. IV. Dei poliedri simili 44
CAP. V. Dei poliedri simmetrici. 49
CAP. VI. Dei poliedri regolari. 54
CAP. VII. Della misura delle superficie dei poliedri 55

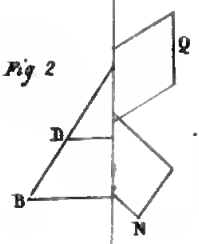
LIBRO III.

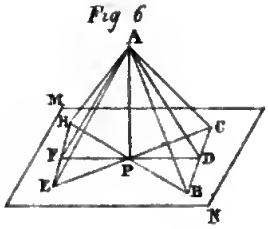
DEI TRE CORPI ROTONDI E DEI TRIANGOLI SFERICI.

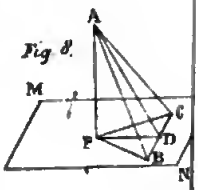
CAP. I. Nozioni e Definizioni preliminari 58
CAP. II. Della misura delle superficie de' tre corpi rotondi, e de'rapporti, che ne derivano 61
CAP. III. Della misura delle solidità o volumi de' tre corpi rotondi, e de'rapporti, che ne derivano. 68

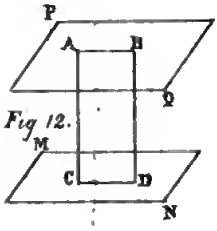
Cap. IV. Delle ragioni, che ha la sfera col cilindro, e col cono ad essa circoscritti 72
Cap. V. De' poli de' circoli della sfera 74
Cap. IV. De' triangoli sferici. 77
De' triangoli sferici simmetrici 78
De' triangoli sferici supplementarj 80
Proprietà dei triangoli sferici. 80
Misura del fuso, del triangolo sferico, e del poligono sferico 84
Misura della piramide sferica e dell'angolo solido al vertice di essa. 88
Risoluzione di alcuni problemi . . . . . .

SBN 648482









NAPOLI

Digitized by Google